



**Programa de Pós-Graduação em Instrumentação, Controle e
Automação de Processos de Mineração (PROFICAM)
Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Associação Instituto Tecnológico Vale (ITV)**

Dissertação

**SIMULAÇÃO DINÂMICA E CONTROLE DE NÍVEL DA INTERFACE E
CONCENTRAÇÃO DE SÓLIDOS NA DESCARGA DE ESPESSADORES SUJEITOS À
ADIÇÃO DE FLOCULANTE**

Alisson Marden Fonseca Pereira

**Ouro Preto
Minas Gerais, Brasil
2021**

Alisson Marden Fonseca Pereira

**SIMULAÇÃO DINÂMICA E CONTROLE DE NÍVEL DA INTERFACE E
CONCENTRAÇÃO DE SÓLIDOS NA DESCARGA DE ESPESSADORES SUJEITOS À
ADIÇÃO DE FLOCULANTE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração da Universidade Federal de Ouro Preto e do Instituto Tecnológico Vale, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Márcio Feliciano Braga,
D.Sc.

Coorientador: Prof. Thiago Antônio Melo Euzébio,
D.Sc.

Ouro Preto
2021

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

P436s Pereira, Alisson Marden Fonseca.

Simulação dinâmica e controle de nível da interface e concentração de sólidos na descarga de espessadores sujeitos à adição de floculante. [manuscrito] / Alisson Marden Fonseca Pereira. - 2021.

105 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Antônio Melo Euzébio.

Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Programa de Mestrado Profissional em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração. Programa de Pós-Graduação em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração.

Área de Concentração: Engenharia de Controle e Automação de Processos Mineraiis.

1. Sedimentação e depósitos - Sedimentação contínua. 2. Métodos de simulação - Simulação numérica. 3. Controle por Matriz Dinâmica (DMC). 4. Controle de processos. 5. Espessadores. 6. Floculação. I. Braga, Márcio Feliciano. II. Euzébio, Thiago Antônio Melo. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título. CDU 681.5:622.2

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1718



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

Alisson Marden Fonseca Pereira

Simulação Dinâmica e Controle de Nível da Interface e Concentração de Sólidos na Descarga de Espessadores Sujeitos à Adição de Floculante

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia de Controle e Automação

Aprovada em 4 de novembro de 2021

Membros da banca

- D.Sc. - Márcio Feliciano Braga - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
- D.Sc. - Thiago Antonio Melo Euzébio - Coorientador (Instituto Tecnológico Vale)
- D.Sc. - Moisés Tavares da Silva - (Instituto Tecnológico Vale)
- D.Sc. - Luciano Perdigão Cota - (Instituto Tecnológico Vale)
- D.Sc. - Luís Marcelo Marques Tavares - (Universidade Federal do Rio de Janeiro)
- D.Sc. - Felipe Novaes Caldas - (Vale)

Márcio Feliciano Braga, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 21/01/2022



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Feliciano Braga, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 09/02/2022, às 09:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0270763** e o código CRC **322E6D54**.

*Dedico este trabalho ao meu pai,
Jaques Mardem, e à minha mãe,
Natália .*

Agradecimentos

Sou profundamente grato a Deus pela sua imensa bondade e misericórdia. Sem Ele, o êxito na execução deste trabalho e muitos outros que desenvolvi em minha vida não seria possível.

Agradeço aos meus pais, Jaques Mardem e Natália, por, em diversos momentos abrirem mão dos próprios sonhos para me ajudarem a alcançar os meus.

Meu agradecimento especial à minha esposa, Cíntia, pelo companheirismo, paciência e encorajamento nos diversos momentos de dificuldade encontrados no desenvolvimento do trabalho.

Agradeço às minhas irmãs Hellen e Anna Júlia, minhas inspirações de garra e alegria. Agradeço a todos os meus familiares que, desde sempre, são espelho de caráter e hombridade.

Agradeço, ainda, os meus orientadores; Doutor Márcio Braga, que tem acompanhado minha trajetória com muita confiança e empenho desde a graduação, e o Doutor Thiago Euzébio, que agregou muito valor ao trabalho com ideias e sugestões valiosas.

Por fim, gostaria de agradecer e parabenizar o Instituto Tecnológico Vale, a Universidade Federal de Ouro Preto e os idealizadores do PROFICAM, pelo aporte financeiro e a iniciativa de desenvolver um programa de mestrado preocupado com os problemas reais enfrentados pela indústria. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Brasil (CAPES), Código de Financiamento 001; do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq); da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG); e da Vale SA.

*“Let the future tell the truth, and
evaluate each one according to his
work and accomplishments. The
present is theirs; the future, for
which I have really worked, is mine”
(Nikola Tesla)*

Resumo

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SIMULAÇÃO DINÂMICA E CONTROLE DE NÍVEL DA INTERFACE E CONCENTRAÇÃO DE SÓLIDOS NA DESCARGA DE ESPESADORES SUJEITOS À ADIÇÃO DE FLOCULANTE

Alisson Marden Fonseca Pereira

Novembro/2021

Orientadores: Márcio Feliciano Braga
Thiago Antônio Melo Euzébio

Na literatura, geralmente, modelam-se os espessadores sem levar em conta a adição de floculante. Neste trabalho, obtém-se um modelo para espessadores cilindro-cônicos convencionais no qual a adição de floculante é considerada com o intuito de realizar o controle do nível da interface de sedimentos. Apresenta-se um procedimento numérico para a simulação do modelo em ambiente matemático. A validação do modelo é realizada por meio da coleta de dados em um espessador em operação em planta de tratamento de minérios da *Vale S.A.*. Finalmente, são implementadas duas técnicas de controle para o nível da interface de sedimentos e a concentração de sólidos no *underflow*: o conhecido PI e o *Dynamic Matrix Control* (DMC), um dos mais conhecidos entre os métodos da família MPC (*Model Predictive Control*). As simulações mostram que o modelo de espessador proposto, além de representar com fidelidade a altura da interface, apresenta desempenho similar aos modelos existentes. Com isso, viabiliza-se a aplicação de técnicas de controle ao processo, como o DMC, cujos resultados, no caso estudado, foram superiores ao PI.

Palavras-chave: Separação sólido-líquido, Sedimentação contínua, Espessadores, Floculação, Controle de processos, Simulação numérica, Controle por Matriz Dinâmica (DMC).

Macrotema: Usina; **Linha de Pesquisa:** Análise e Projeto de Sistemas de Controle Avançado; **Tema:** Redução de Variabilidade e Melhoria de Controle; **Área Relacionada da Vale:** Pesquisa.

Abstract

Abstract of Dissertation presented to the Graduate Program on Instrumentation, Control and Automation of Mining Process as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DYNAMIC SIMULATION AND CONTROL OF INTERFACE LEVEL AND CONCENTRATION OF SOLIDS IN THE DISCHARGE OF THICKENERS SUBJECT TO FLOCCULANT ADDITION

Alisson Marden Fonseca Pereira

November/2021

Advisors: Márcio Feliciano Braga
Thiago Antônio Melo Euzébio

Thickeners are often modeled without taking into account the addition of flocculants. In this work, it is obtained a model for tapered-cylindrical conventional thickeners in which the addition of flocculant is considered, in order to control the sediment level. A numerical procedure is used to simulate the model in a mathematical software. The model is validated by collecting real data from thickeners at *Vale Inc.* mineral processing plants. Finally, two control techniques are implemented for the sediment level and the underflow solids volume fraction: the known PI controller and the Dynamic Matrix Control (DMC), one of the most popular methods of model predictive control. The simulations show that the proposed thickener model, not only represents the interface level with fidelity, but also presents a similar performance to the existing models, which represents an important improvement for the area. Therefore, it is possible to apply control techniques to the process, such as the DMC studied, whose results, in the studied case, were superior to PI controllers.

Keywords: Solid-liquid separation, Continuous sedimentation, Thickeners, Flocculation, Process control, Numerical simulation, Dynamic Matrix Control (DMC).

Macrotheme: Usine; **Research Line:** Analysis and Design of Advanced Control Systems; **Theme:** Variability Reduction and Control Improvement; **Related Area of Vale:** Research.

Lista de Figuras

Figura 2.1	Seção transversal de partículas de minério.	21
Figura 2.2	Diagrama típico de tratamento de minério.	22
Figura 2.3	Custo relativo por tonelada de sólidos em função da porcentagem de água na polpa, da granulometria das partículas sólidas e do método de desaguamento.	26
Figura 2.4	Representação ilustrativa das etapas de um ensaio de sedimentação em batelada.	27
Figura 2.5	Curva típica de um ensaio de sedimentação em batelada.	28
Figura 3.1	O primeiro espessador. (a) Esquemático e (b) foto do espessador original de Dorr.	30
Figura 3.2	Espessador convencional de 125 metros de diâmetro.	31
Figura 3.3	Curva de variação do torque e medidas de segurança tomadas e circuito eletrônico para a operação dos <i>rakes</i>	32
Figura 3.4	Poço de alimentação com suas entradas tangenciais e defletores internos.	32
Figura 3.5	Comparação de <i>underflow</i> produzido por diferentes tipos de espessadores.	33
Figura 3.6	Vista lateral de um espessador convencional.	35
Figura 3.7	Espessador de alta capacidade de lamelas em detalhes.	36
Figura 4.1	Floculação por pontes. (a) Funcionamento adequado do processo. (b) Re-estabilização por excesso de floculante.	38
Figura 4.2	Adsorção de um polímero catiônico em uma superfície com carga negativa.	39
Figura 4.3	Diferentes estruturas de flocos: (a) Aberto; (b) Fechado.	41
Figura 5.1	Ilustração esquemática de um espessador. (a) Princípio de operação. (b) modelo unidimensional idealizado.	43
Figura 5.2	Ilustração esquemática de um tanque cônico.	44
Figura 5.3	Curva típica da relação entre a velocidade de Stokes e a concentração de floculante: $v_{Sed} = v_{Sed}(c)$. A velocidade máxima é $v_{Sed}(c^{opt}) = v_0$	48
Figura 5.4	Subdivisão do eixo z para propósitos numéricos.	52
Figura 5.5	Perfil inicial de concentração no espessador para o exemplo em que (a) é o perfil simulado para $\Delta z = 0,025$ m e (b) é a curva apresentada em Betancourt <i>et al.</i> (2014) para diferentes valores de Δz	55

Figura 5.6	Comportamento da concentração no <i>underflow</i> ao longo do tempo para cada cenário do exemplo.	56
Figura 5.7	Altura da interface ao longo do tempo para cada cenário do exemplo.	57
Figura 5.8	Gráficos tridimensionais para a concentração de sólidos no espessador ao longo do tempo para cada cenário do exemplo.	58
Figura 5.9	Curva para vazão no espessador ao longo do tempo para os cenários 2 e 3. O gráfico para o primeiro cenário é omitido pelo fato das variáveis serem constantes.	59
Figura 5.10	Curvas para (a) valor de k_f ao longo do tempo e para (b) o perfil de k no cenário 3.	59
Figura 5.11	Curva relacional entre dosagem de floculante e velocidade de sedimentação média para os testes realizados com amostras da alimentação do espessador de Carajás.	61
Figura 5.12	Sinal de Vazão Volumétrica aplicado no espessador de Carajás.	62
Figura 5.13	Perfil de densidade usado para iniciar a simulação do espessador de Carajás.	62
Figura 5.14	Sinais de densidade no <i>underflow</i> do espessador e do modelo ao longo do tempo.	63
Figura 5.15	(a) Perfil de densidade no espessador e (b) sinal de altura da interface para a janela de tempo 1.	64
Figura 5.16	(a) Sinal de vazão no <i>underflow</i> e (b) densidade no <i>underflow</i> para um segundo intervalo de tempo.	64
Figura 5.17	Sinais de densidade no <i>underflow</i> e do modelo ao longo do tempo com espessador inicialmente sem massa sólida na simulação.	65
Figura 6.1	Ilustração da metade simétrica do espessador usado para simulação do modelo de espessador com área variável. As linhas pontilhadas em vermelho indicam diferentes inclinações para o fundo.	70
Figura 6.2	Perfil inicial de concentração para as simulações do modelo de Bürger <i>et al.</i> (2017).	71
Figura 6.3	Perfis de concentração de sólidos para espessadores com diferentes inclinações do fundo.	72
Figura 6.4	Concentração no <i>underflow</i> ao longo do tempo para espessadores com diferentes inclinações do fundo.	72
Figura 6.5	Altura da interface ao longo do tempo e concentração final para espessadores com diferentes inclinações do fundo.	73
Figura 7.1	Ilustração esquemática do modelo unidimensional de um espessador.	74
Figura 7.2	Perfil de concentração volumétrica de sólidos para o Cenário 2 do exemplo da Seção 5.2.1.2.	78
Figura 7.3	Comparativo das concentrações entre os modelos de Betancourt <i>et al.</i> (2014) e o modelo proposto.	79
Figura 7.4	Perfis de concentração de sólidos para espessadores com diferentes H_c	80

Figura 7.5	Concentração no <i>underflow</i> ao longo do tempo para espessadores com diferentes H_c	81
Figura 7.6	Altura da interface ao longo do tempo para espessadores com diferentes H_c	81
Figura 7.7	Curvas para avaliação da variação de D_{min} no cálculo do vetor de área sa seção transversal.	82
Figura 7.8	Curvas para avaliação da inclusão da área do poço de alimentação no cálculo do vetor de área sa seção transversal.	83
Figura 7.9	Curvas para avaliação da divisão do eixo espacial em diferentes passos dz	84
Figura 7.10	Perfis de concentração de sólidos nos dois intervalos de avaliação para os modelos de espessadores cilíndrico e cilíndrico-cônico.	86
Figura 7.11	Densidade no <i>underflow</i> nos dois intervalos de avaliação para os modelos de espessadores cilíndrico e cilíndrico-cônico.	87
Figura 7.12	Altura da interface nos dois intervalos de avaliação para os modelos de espessadores cilíndrico e cilíndrico-cônico.	88
Figura 8.1	Estratégia básica do controlador MPC.	90
Figura 8.2	Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante.	94
Figura 8.3	Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante, variando-se o <i>setpoint</i> de densidade.	97
Figura 8.4	Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante, variando-se o <i>setpoint</i> de altura da interface.	98
Figura 8.5	Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante, variando-se os <i>setpoints</i> de densidade no <i>underflow</i> e altura da interface.	99
Figura 8.6	Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante, variando-se a densidade da polpa da alimentação.	100

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Operações unitárias de beneficiamento mineral.	23
Tabela 2.2	Classificação dos estágios de britagem.	24
Tabela 5.1	Relação dados solicitados e obtidos de planta da Vale S.A. em Carajás - PA.	60
Tabela 5.2	Resultados dos ensaios de sedimentação realizados com amostras da alimentação do espessador de Carajás.	60
Tabela 5.3	Métricas de avaliação da validação do modelo de Betancourt <i>et al.</i> (2014).	65
Tabela 6.1	Características do espessador usado para simulação do modelo de Bürger <i>et al.</i> (2017)	70
Tabela 7.1	Comparativo de tempos de execução para diferentes números de divisões da simulação.	82
Tabela 7.2	Comparativo de tempos de execução para diferentes passos dz	83
Tabela 7.3	Métricas de avaliação da validação do modelo final.	85
Tabela 8.1	Parâmetros de sintonia DMC MIMO.	94
Tabela 8.2	Ganhos do controlador PI.	94
Tabela 8.3	Índice de desempenho IAE para os testes realizados com controladores PI e DMC no modelo de Betancourt <i>et al.</i> (2014)	95
Tabela 8.4	Parâmetros de sintonia DMC MIMO para o controle do modelo proposto.	96
Tabela 8.5	Ganhos do controlador PI para o controle do modelo proposto.	96
Tabela 8.6	Índice de desempenho IAE para os testes realizados com controladores PI e DMC no modelo proposto.	98
Tabela 8.7	Média de floculante utilizado nas simulações dos controladores PI e DMC.	99

Lista de Siglas e Abreviaturas

CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
DMC	<i>Dynamic Matrix Control</i>
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
IAE	<i>Integral of Absolute Error</i>
IMC	<i>Internal Model Control</i>
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i>
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
NRMSE	<i>Normalized Root Mean Squared Error</i>
PI	Proporcional Integral
PID	Proporcional Integral Derivativo
RMSE	<i>Root Mean Squared Error</i>
ROM	Run of Mine

Lista de Símbolos

δ	Função delta de Dirac
Δt	Passo temporal
Δz	Passo espacial
\mathcal{H}	Função de Heaviside
μ_f	Viscosidade do fluido
ϕ	Concentração volumétrica de sólidos
ϕ_e	Concentração volumétrica de sólidos no <i>overflow</i>
ϕ_f	Concentração volumétrica de sólidos crítica
ϕ_f	Concentração volumétrica de sólidos na alimentação
ϕ_u	Concentração volumétrica de sólidos no <i>underflow</i>
ρ_f	Densidade do fluido
ρ_s	Densidade do sólido
σ_e	Função de tensão efetiva dos sólidos
v_{hs}	Função de velocidade de sedimentação retardada
v_{Sed}	Velocidade de Sedimentação
A	Área da seção transversal
B	Profundidade do <i>underflow</i> a partir da alimentação
c	Concentração de floculante
c_{opt}	Concentração ótima de floculante
D	Diâmetro
d_{comp}	Função de compressibilidade
d_{disp}	Função de dispersibilidade
D_{fw}	Diâmetro do <i>feedwell</i>
D_{max}	Diâmetro máximo do espessador
D_{min}	Diâmetro mínimo do espessador
F	Função de fluxo convectivo
g	aceleração da gravidade
G_j	Fluxo numérico de Godunov
H	Profundidade do <i>overflow</i> a partir da alimentação
H_c	Profundidade da região de área variável a partir da alimentação
J_{comp}	Fluxo de compressão

J_{disp}	Fluxo de dispersão
k	Propriedade referente à adição de floculante
k_f	Propriedade referente à adição de floculante na alimentação
m_{fl}	massa de floculante
q	Função de velocidade de massas
Q_e	Vazão volumétrica no <i>overflow</i>
Q_f	Vazão volumétrica na alimentação
Q_u	Vazão volumétrica no <i>underflow</i>
t	Tempo
V_0	Velocidade de sedimentação máxima
V_{min}	Velocidade de sedimentação mínima
w	Quantidade conservativa que descreve a concentração de partículas sólidas que carregam a propriedade k consigo
w_f	Quantidade conservativa que descreve a concentração de partículas sólidas que carregam a propriedade k consigo na alimentação
z	Profundidade

Sumário

1	Introdução	18
1.1	Objetivos	19
1.2	Organização do trabalho	20
2	Tratamento de Minérios	21
2.1	Introdução	21
2.2	Operação Unitária de Desaguamento	24
2.2.1	Sedimentação	26
2.2.1.1	Sedimentação Gravítica	26
2.2.1.2	Sedimentação Centrífuga	27
2.2.2	Filtragem	28
2.2.3	Secagem	29
2.3	Conclusão	29
3	Espessadores	30
3.1	Tipos de Espessadores	31
3.1.1	Espessador Convencional	33
3.1.2	Espessador sem <i>rakes</i>	34
3.1.3	Espessador de alta densidade	34
3.1.4	Espessador cônico	35
3.2	Conclusão	35
4	Agregação de Partículas	37
4.1	Coagulação	37
4.2	Floculação	38
4.2.1	Etapas no processo de floculação	39
4.2.1.1	Desestabilização da suspensão	40
4.2.1.2	Formação de flocos	40
4.2.1.3	Desagregação dos flocos	40
4.2.2	Características dos flocos	41
4.3	Conclusão	41

5	Modelo de Espessador Cilíndrico Sujeito à Adição de Floculante	42
5.1	Desenvolvimento Matemático	44
5.1.1	Modelo sem adição de floculante	45
5.1.2	Modelo para adição de floculante	46
5.1.3	Propriedades da alimentação e a floculação	48
5.1.4	Soluções em regime permanente	49
5.1.5	Procedimento numérico para simulação	50
5.1.6	Condição de estabilidade do método numérico	53
5.2	Simulações e Resultados	53
5.2.1	Testes Ilustrativos	53
5.2.1.1	Cenário 1	54
5.2.1.2	Cenário 2	55
5.2.1.3	Cenário 3	55
5.2.2	Validação do Modelo	55
5.2.2.1	Ajuste de Parâmetros do Modelo	59
5.2.2.2	Discussão dos Resultados	61
5.3	Conclusão	65
6	Modelo de Espessador com Área da Seção Transversal Variável	66
6.1	Desenvolvimento Matemático	66
6.2	Procedimento numérico para simulação	67
6.3	Condição de estabilidade	69
6.4	Simulações e Resultados	69
6.4.1	Testes Ilustrativos	69
6.5	Conclusão	73
7	Modelo de Espessador Cilíndrico-Cônico Sujeito à Adição de Floculante	74
7.1	Desenvolvimento Matemático	75
7.2	Procedimento numérico para simulação	75
7.3	Condição de estabilidade	77
7.4	Simulações e Resultados	77
7.4.1	Testes Ilustrativos	78
7.4.1.1	Espessador Cilíndrico	78
7.4.1.2	Variação na área da seção transversal	78
7.4.1.3	Avaliação de Desempenho Computacional	80
7.4.2	Validação do Modelo	84
7.5	Conclusão	85

8	Aplicação de Controle: <i>Model Predictive Control</i>	89
8.1	Controle por Matriz Dinâmica (DMC) para sistemas MIMO	91
8.2	Resultados e Simulações	92
8.2.1	Aplicação de controle ao modelo de espessador cilíndrico sujeito à adição de floculante	93
8.2.2	Aplicação de Controle ao modelo de espessador cilíndrico-cônico sujeito à adição de floculante	95
8.3	Conclusão	98
9	Conclusões	101
9.1	Propostas de Trabalhos Futuros	102
9.2	Publicação	102
	Referências Bibliográficas	103

1 Introdução

O uso de recursos hídricos é uma prática indiscutivelmente comum no processamento mineral. Para garantir a viabilidade econômica da exploração, a água acaba se tornando o insumo mais importante no âmbito da mineração (LUZ *et al.*, 2010). Considerada a fase líquida mais utilizada nas usinas de beneficiamento de minérios que fazem uso de separação a úmido, a água é usada basicamente como meio de transporte na área.

Em usinas modernas, faz-se cada vez mais necessário o uso de recursos hídricos com maior qualidade e volumes que podem ser até 20 vezes maiores que o volume de minério, como cita Luz *et al.* (2010). Com isso, para determinar a localização de uma usina de tratamento de minérios é necessário avaliar a disponibilidade de água.

A necessidade do uso da água traz consigo indispensáveis etapas de separação sólido-líquido nas usinas de tratamento de minérios. O produto precisa passar por essas etapas para ser transportado e entregue dentro das exigências aos clientes, enquanto os rejeitos de minério precisam ter o seu volume reduzido para ir às barragens ou até mesmo serem desidratados ao ponto de poderem ser armazenados em pilhas.

São três as etapas de separação sólido-líquido: sedimentação, filtragem e secagem. O foco do presente trabalho está na etapa de sedimentação, a responsável por reduzir o maior volume de água da polpa. A sedimentação é comumente realizada em espessadores. Esses equipamentos constituem-se de tanques que recebem uma polpa com alto volume de água e entrega um adensado pela descarga, posicionada na parte inferior do equipamento. Além disso, transborda um líquido com percentual de sólidos pequeno, o clarificado que é, geralmente, reutilizado nas usinas de beneficiamento mineral.

A eficiência de um espessador contínuo está baseada na sua capacidade de produzir um líquido clarificado e entregar um concentrado com o percentual requerido na descarga, ou *underflow*, em tempo hábil para o bom funcionamento da cadeia de processamento do minério. Por trabalhar com partículas sólidas muito finas, o tempo de sedimentação tende a ser alto. Assim, costuma-se utilizar flocculantes para a agregação das partículas para a redução desse tempo.

Em geral, aplicam-se malhas de controle para manter a concentração de sólidos no *underflow* dos espessadores na referência, ou *setpoint*, desejada, utilizando-se da vazão no *underflow* como variável manipulada (BETANCOURT *et al.*, 2014; BÜRGER e NARVÁEZ, 2007; BÜRGER *et al.*, 2005, 2013, 2017; CONCHA, 2014). No entanto, são escassos os trabalhos que tiram proveito da adição de flocculante para implementação de alguma malha de controle. Para isso, precisa-se primeiramente modelar o sistema de espessamento contínuo. Em Betancourt *et al.* (2014) é apresentado um modelo unidimensional que leva em consideração a adição de flocculantes aos espessadores. Betancourt *et al.* (2014) implementa um controle com ação proporcional para a concentração de sólidos no *underflow*, manipulando-se a vazão no *underflow*, e também apresenta uma malha de controle para o nível da interface de sedimentos

manipulando-se a massa de floculantes adicionada à alimentação do espessador.

O objetivo do presente trabalho é aplicar melhorias ao modelo apresentado em Betancourt *et al.* (2014), validando-o com dados coletados em um espessador da planta de beneficiamento mineral da *Vale S.A.* em Carajás - PA. O modelo apresentado em Betancourt *et al.* (2014) simplifica a geometria dos espessadores, considerando que o tanque é totalmente cilíndrico, ou seja, a área de seção transversal é constante. Espessadores convencionais apresentam uma região cônica em sua base, para direcionamento dos sedimentos ao ponto de descarga. Acrescenta-se ao modelo desenvolvido por Betancourt *et al.* (2014) essa região cônica, baseando-se no trabalho de Bürger *et al.* (2017).

Com isso, espera-se obter um modelo capaz de representar bem a operação dinâmica do equipamento em questão, vislumbrando-se a aplicação de técnicas de controle para a malha de nível da interface e a malha de concentração de sólidos no *underflow*. Uma técnica amplamente utilizada e bem sucedida no meio industrial é o Controle por Matriz Dinâmica (DMC, do inglês *Dynamic Matrix Control*) (CAMACHO e ALBA, 2013). Esse tipo de controle é pertencente à classe dos MPC (*Model Predictive Control*) e foi aplicado no controle de concentração de sólidos em de Almeida e Euzébio (2019). Em Tan *et al.* (2017), desenvolve-se um controle MPC com restrições para evitar o alto torque de inclinação do *rake*. Desenvolve-se neste trabalho um controlador DMC multivariável, visando a minimização de partículas sólidas no *overflow* e controle da concentração de sólidos no *underflow*.

1.1 Objetivos

O trabalho tem como objetivos principais:

- Desenvolvimento de um modelo matemático de espessador que considere o efeito da adição de floculante e a geometria cilíndrico-cônica dos espessadores;
- Aplicação e avaliação do desempenho do controlador DMC multivariável ao modelo de espessador.

Como objetivos secundários, tem-se:

- Implementação e simulação do modelo de espessador de Betancourt *et al.* (2014);
- Implementação e simulação do modelo de espessador de Bürger *et al.* (2017);
- Validação dos modelos matemáticos do espessador com dados reais de operação do equipamento;
- Aplicação de controladores PI para avaliação do controlador DMC.

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho foi iniciado com uma rápida contextualização do tema de pesquisa. Dissertou-se sobre os seguintes assuntos: introdução, motivação para realização do trabalho e objetivos do trabalho.

Além do capítulo introdutório, estrutura-se o trabalho com os capítulos seguintes:

- **Capítulo 2:** No capítulo 2 são descritos os principais passos em tratamento de minérios, apresentando-se cada um brevemente. Detalha-se ainda a operação unitária de desagregamento no beneficiamento mineral.
- **Capítulo 3:** Faz-se uma contextualização histórica sobre os espessadores, detalhando-se todos os componentes acessórios ao equipamento. São apresentados os tipos de espessadores e suas características, bem como os modos de operação.
- **Capítulo 4:** São introduzidas as técnicas atuais de agregação de partículas, descrevendo-se brevemente a coagulação e focando-se na técnica de floculação. Apresentam-se as etapas necessárias ao processo de floculação e as características dos flocos formados.
- **Capítulo 5:** É abordada uma técnica de modelagem de espessadores contínuos considerando-se a adição de floculante, apresentando-se detalhadamente a técnica desenvolvida em Bétancourt *et al.* (2014). Também apresentam-se os resultados das simulações de testes ilustrativos, utilizando-se de exemplos de simulação encontrados na bibliografia e dados adquiridos em um espessador real.
- **Capítulo 6:** Introduce-se a técnica de modelagem de espessadores considerando-se a área da seção transversal variável e apresenta-se resultados de simulações focando-se no efeito da variação da área da seção transversal, conforme apresentado em Bürger *et al.* (2017).
- **Capítulo 7:** Propõe-se um novo modelo para espessadores, considerando-se tanto a adição de floculante quanto a variação da área da seção transversal. O novo modelo é submetido a testes ilustrativos e validado com os dados de operação de um espessador real.
- **Capítulo 8:** Apresenta-se com brevidade o MPC, enfatizando-se a metodologia DMC como ferramenta para controle multivariável do sistema de espessador desenvolvido. Para fins comparativos aplica-se também um controlador Proporcional-Integral (PI) descentralizado.
- **Capítulo 9:** São feitas as considerações finais, bem como são apresentadas as sugestões de trabalhos futuros.

2 Tratamento de Minérios

2.1 Introdução

Na mineração, o tratamento de minérios é fundamental, uma vez que a maioria dos minérios, rochas ou minerais são encontrados na crosta terrestre em situação inapropriada para o seu uso. O beneficiamento, ou tratamento, de minérios pode ser entendido como a separação física ou físico-química dos minerais de interesse da ganga (minerais não valiosos) para a obtenção de uma parcela enriquecida, corriqueiramente chamada de concentrado (LUZ e LINS, 2018). O tratamento de minérios também pode ser definido como o conjunto de operações aplicadas aos bens minerais, cujo intuito é alterar a granulometria, a concentração relativa das espécies minerais presentes ou a forma, sem, contudo, modificar a identidade química ou física dos minerais (LUZ *et al.*, 2010).

Pode-se destacar duas operações fundamentais em tratamento de minérios: liberação e separação do mineral valioso da ganga (WILLS e FINCH, 2015). A liberação é realizada por meio da cominuição, que envolve a britagem e a moagem. A separação, ou concentração, é a etapa responsável por apartar o minério do rejeito. Essa etapa só é eficiente caso a operação de liberação tenha sido realizada de maneira apropriada. É fácil entender isso, ao se analisar a Figura 2.1, na qual ilustram-se as seções transversais de partículas de minério. Uma partícula de minério maior ao ser submetida à cominuição, pode apresentar fragmentos com características mais homogêneas, possibilitando uma separação mais eficiente entre minério e ganga.

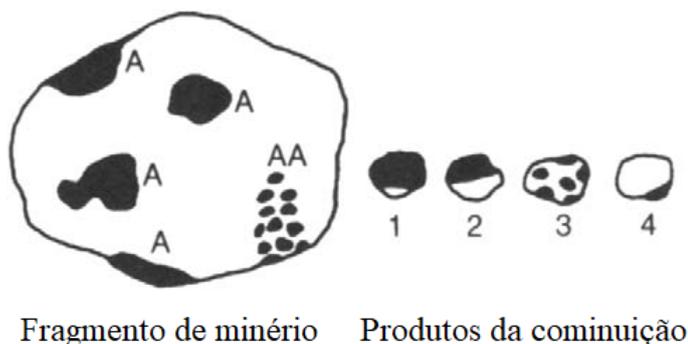


Figura 2.1: Seção transversal de partículas de minério.
Fonte: Adaptado de Wills e Finch (2015).

A concentração é geralmente realizada a úmido, o que leva à necessidade da realização da etapa de desaguamento, ou a retirada da água do produto final do beneficiamento antes de ser despachado. As operações de desaguamento são espessamento e filtragem, seguidas da secagem.

De maneira resumida, as operações pelas quais o minério proveniente da lavra, o ROM (*Run of Mine*), é submetido são:

- Cominuição: britagem e moagem;

- Peneiramento, ou *sizing*, e classificação (hidrociclone, classificador espiral);
- Concentração: gravítica, magnética, eletrostática, flotação, etc.;
- Desaguamento: espessamento e filtração;
- Secagem: secador rotativo, *spray dryer*, secador de leito fluidizado;
- Disposição de rejeito em cavas de mina a céu aberto, galeria subterrânea, barragem de rejeito.

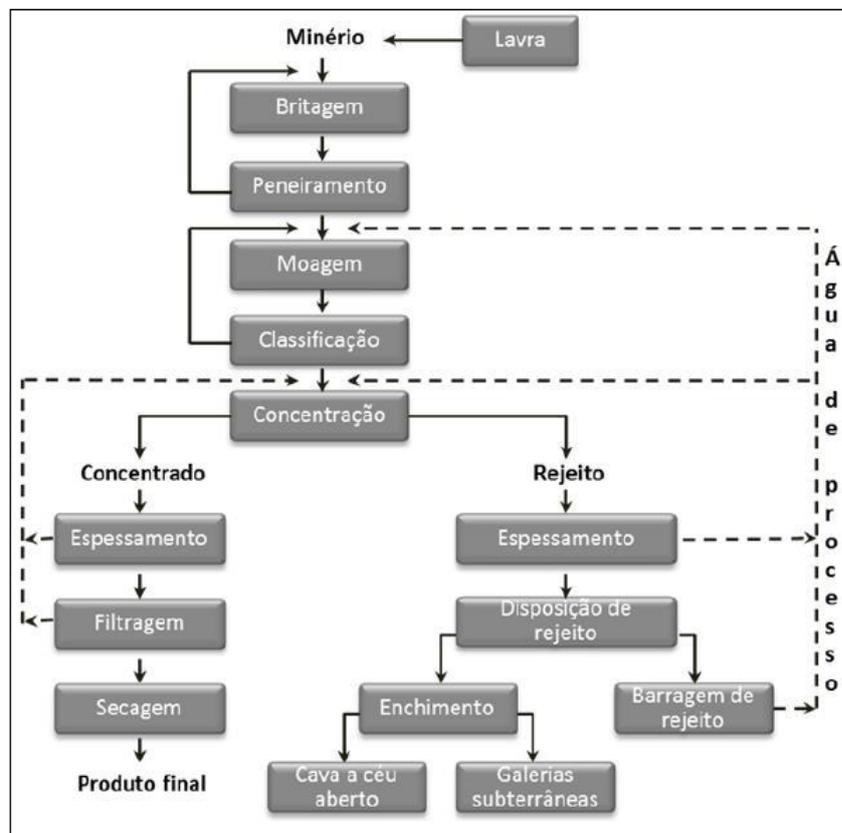


Figura 2.2: Diagrama típico de tratamento de minério.
 Fonte: Luz e Lins (2018).

Uma vez realizada a lavra do minério, os caminhões transportadores levam o produto até os britadores primários, que são equipamentos de grande porte, móveis ou estáticos, capazes de receberem rochas de até 1000 mm na alimentação. São nesses equipamentos que se inicia a britagem, apesar de que, na lavra, costuma-se utilizar explosivos para que o minério possa ser retirado do seu leito natural e pode-se, portanto, considerar a extração por meio de explosivos como a primeira etapa da cominuição (WILLS e FINCH, 2015). Luz *et al.* (2010) define a britagem como a operação que fragmenta os blocos obtidos na lavra. Em Luz *et al.* (2010), apresenta-se a Tabela 2.2, em que é possível compreender a faixa de tamanho das partículas em cada estágio da britagem. Como existe uma série de tipos de equipamentos, essa operação

Tabela 2.1: Operações unitárias de beneficiamento mineral.

Operações Unitárias de Beneficiamento Mineral			
Grupos	Função	Operações Unitárias	Função
Cominuição	Adequar o tamanho das partículas ao processo	Britagem	Cominuição grossa
		Moagem	Cominuição fina
Sizing	Controlar o tamanho das partículas	Peneiramento	Controle do produto da britagem
		Classificação	Controle do produto da moagem
		Deslamagem	Descarte de lamas
Concentração	Separar minerais	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Sorting</i> - Separação densitária - Separação elétrica - Separação magnética - Flotação 	Gerar concentrado dentro das especificações de mercado (químicas e mineralógicas)
Desaguamento	Separar água dos sólidos	Espessamento	Gerar produto com concentração de sólidos adequada para a filtração
		Filtração	Gerar produto com a umidade desejada
		Secagem	Eliminar a água do minério

Fonte: Adaptado de Luz *et al.* (2010).

deve ser repetida diversas vezes, mudando-se o equipamento, até que seja obtido um material adequado à alimentação da moagem. A britagem é geralmente realizada a seco, ao passo que na moagem faz-se necessária a adição de água ao processo (WILLS e FINCH, 2015).

A fragmentação fina, ou moagem, adéqua o produto ao tamanho necessário para a concentração ou a qualquer outro processo industrial (pelotização, calcinação, lixiviação, combustão etc). O *Pellet Feed*, por exemplo, produto de minério de ferro fino, possui granulometria inferior a 150 μm . Em Betancourt *et al.* (2014), defende-se que a faixa granulométrica das partículas necessária para uma operação de flotação eficiente é de 50 a 200 μm . Cabe, portanto, à etapa de moagem receber o produto com granulometria inferior a 0,8 mm, proveniente da britagem quaternária (Tabela 2.2), e entregar às etapas subsequentes o produto com granulometria numa faixa próxima às citadas.

Sugere-se a leitura dos capítulos 5, 6 e 7 de Wills e Finch (2015), ou os capítulos 4 e 5 de Luz *et al.* (2010) para aprofundamento de conhecimento em cominuição.

Com o intuito de controlar as características granulométricas do produto nas etapas de cominuição, realizam-se o peneiramento e a classificação. Esses dois métodos apresentam como objetivo em comum, no tratamento de minérios, a separação de um certo material em duas ou mais frações, com partículas de tamanhos distintos (LUZ *et al.*, 2010).

Tabela 2.2: Classificação dos estágios de britagem.

Estágio de Britagem	Tamanho Máximo de Alimentação (mm)	Tamanho Máximo de Produção (mm)
Britagem Primária	1000	100
Britagem Secundária	100	10
Britagem Terciária	10	1
Britagem Quaternária	5	0,8

Fonte: Luz *et al.* (2010).

O peneiramento e a classificação se distinguem quanto à natureza da separação. Enquanto a separação por peneiramento leva em conta o tamanho das partículas, na classificação a separação é baseada no conceito da velocidade em que os grãos atravessam um certo meio fluido (geralmente a água, no caso do tratamento de minérios). Para partículas com granulometria muito fina, para as quais o peneiramento não funciona de uma forma eficiente, a classificação a úmido é aplicada (LUZ *et al.*, 2010).

A operação de concentração tem como método primogênito o *Hand Sorting*, ou catação. Devido à necessidade de processar grandes quantidades de minério, o método caiu em desuso, dando lugar a outros métodos de seleção e até mesmo equipamentos eletrônicos de catação aplicados à pré-seleção de determinados tipos de minérios (SALTER e WYATT, 1991; WILLS e FINCH, 2015). A separação pode se dar por diferentes propriedades do material em processamento. A separação gravítica, por exemplo, tira proveito da diferença de densidade entre o minério e a ganga. No caso da separação magnética, a propriedade diferenciadora é a susceptibilidade magnética, ao passo que a condutividade elétrica é a propriedade diferenciadora quando aplica-se a separação eletrostática/eletrodinâmica. Um método de concentração amplamente utilizado no tratamento de minérios é a flotação. Considerado o mais importante e versátil (KING, 2012; WILLS e FINCH, 2015), a flotação possui como propriedade diferenciadora a hidrofobicidade, ou seja, as diferenças nas superfícies do minério de interesse e da ganga.

Separados, o produto e a ganga seguem diferentes caminhos no processo. Tendo ambos como operação posterior o desaguamento, sendo que o rejeito, devido ao elevado custo das operações de filtragem e secagem, é submetido apenas ao espessamento.

A Figura 2.2 apresenta o fluxograma usual das operações unitárias no tratamento de minérios, que em conjunto com a Tabela 2.1, traz uma visão sistêmica e simplificada do beneficiamento mineral, resumindo o conteúdo discutido na seção.

2.2 Operação Unitária de Desaguamento

Comumente, se faz necessária a separação de partículas sólidas da água, que age como um meio transportador para os sólidos. O procedimento de separação sólido-líquido utilizado depende da natureza da polpa que será desaguada e também dos produtos finais que serão

produzidos (KING, 2012).

O desaguamento é uma etapa necessária na grande maioria dos processos de tratamento de minérios, uma vez que são poucos os processos de separação mineral que não envolvem quantidades substanciais de água (WILLS e FINCH, 2015).

Produzir um sólido desaguado e um líquido clarificado podem ser entendidos como os dois objetivos básicos da separação sólido-líquido (LUZ *et al.*, 2010). Projetar um equipamento para execução de desaguamento depende das especificidades do processo, além das características da alimentação. Selecionar o equipamento de separação sólido-líquido pode ser uma tarefa árdua, dada a variedade de equipamentos disponíveis. Determinar o equipamento apropriado depende de algumas variáveis (LUZ *et al.*, 2010; SILVERBLATT e EASTON, 2002):

1. objetivos e o efeito da eficiência do processo de desaguamento na cadeia de beneficiamento;
2. operação contínua ou em batelada;
3. requer-se conhecer previamente a vazão de alimentação, a concentração de sólidos, a distribuição granulométrica e, também, a densidade dos sólidos envolvidos no processo;
4. deve-se avaliar a necessidade de pré-tratamento da polpa, como coagulação/floculação, tipo de reagentes a serem usados (orgânicos ou não) e as características de resistência requeridas para os flocos;
5. quantidade de sólidos solúveis e a umidade final demandada para a torta de filtração;
6. para o fluido, precisa-se saber a turbidez requerida e a quantidade de sólidos dissolvidos, além da necessidade de adequação de auxiliares de filtração.

Pode-se classificar os métodos de desaguamento em (WILLS e FINCH, 2015):

- **Sedimentação:** é o mais eficiente quando há uma grande diferença de densidade entre o meio líquido e sólido. Esse é o caso de processos minerais, cujo transportador é a água.
- **Filtragem:** separa sólido e líquido em meio poroso, que retém o sólido e permite a passagem do líquido;
- **Secagem térmica:** é a última operação realizada em plantas de processamento mineral. Reduz custos com transporte, pois pode aliviar em cerca de 5% o peso do produto.

As três operações acima são geralmente combinadas e aplicadas, sequencialmente, na etapa de desaguamento no beneficiamento mineral. Num primeiro estágio, a maior parcela da água é retirada por meio da sedimentação. Em Wills e Finch (2015), é defendido que cerca de 80% da água pode ser separada nesse estágio, produzindo uma polpa com até 65% do seu peso em sólidos. O passo subsequente é a filtragem, etapa em que se pode produzir uma torta com sólidos pesando entre 80 e 90% da mistura. Finalmente, a secagem fornece um produto

praticamente desidratado, contendo cerca de 95% do seu peso de massa sólida. O custo relativo a cada operação depende da granulometria dos sólidos e da quantidade de água na polpa. O gráfico apresentado na Figura 2.3 exibe a curva de custos em função da porcentagem de água para três granulometrias distintas.

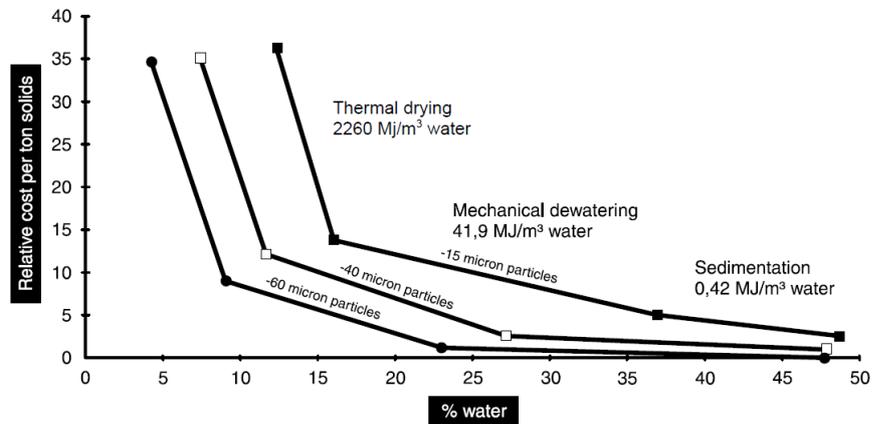


Figura 2.3: Custo relativo por tonelada de sólidos em função da porcentagem de água na polpa, da granulometria das partículas sólidas e do método de desaguamento.

Fonte: Metso Corporation (2018).

Pode-se, ainda, observar no gráfico as faixas de trabalho de cada método de desaguamento. Essas faixas de operação dependem da granulometria das partículas sólidas. A sedimentação pode ser aplicada para uma polpa com até cerca de 23% de água e partículas sólidas menores que 60 μm . Todavia, faz-se necessária a aplicação da filtragem em polpa com a mesma porcentagem de água, mas com granulometria menor que 40 μm . Dessa forma, ratifica-se a importância de conhecer a granulometria do material sólido nas operações unitárias de desaguamento.

2.2.1 Sedimentação

A sedimentação baseia-se em fenômenos de transporte, em que partículas sólidas em suspensão estão sujeitas a diversas forças, como a gravidade e o empuxo, por exemplo (LUZ *et al.*, 2010). A operação de desaguamento baseada em sedimentação pode se dar de duas maneiras distintas: sedimentação gravítica e sedimentação centrífuga (WILLS e FINCH, 2015). Detalham-se ambas e especificam-se os equipamentos utilizados em cada uma na sequência do trabalho.

2.2.1.1 Sedimentação Gravítica

A sedimentação gravítica é a técnica de desaguamento mais aplicada em tratamento de minérios (WILLS e FINCH, 2015). Os espessadores são usados para aumentar a concentração da suspensão por sedimentação, acompanhado da formação de um líquido clarificado. Clarificadores

são similares aos espessadores em estrutura, no entanto, são menos robustos e lidam com suspensões com quantidade de sólidos muito inferior às quantidades trabalhadas em espessadores.

Na sedimentação gravítica, trabalha-se com tanques relativamente rasos, em que retira-se a suspensão espessada pelo fundo do tanque enquanto o líquido clarificado é vertido na parte superior (SILVERBLATT e EASTON, 2002; WILLS e FINCH, 2015). Esses tanques podem operar de maneira contínua ou descontínua (em batelada). É comum utilizar-se da sedimentação descontínua, por meio de testes de proveta, para auxiliar a descrição do processo contínuo (LUZ *et al.*, 2010).

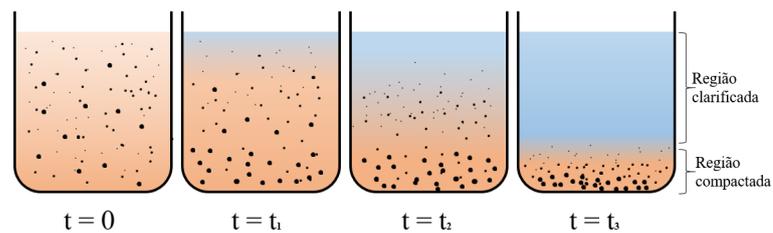


Figura 2.4: Representação ilustrativa das etapas de um ensaio de sedimentação em batelada.
Fonte: O autor.

Durante um ensaio de proveta, pode-se observar três regiões distintas no recipiente. A região de líquido clarificado é aquela cuja presença de partículas sólidas é mínima. Abaixo dela fica a região de sedimentação livre, onde as partículas sólidas sedimentam sem que haja interação entre elas. Por fim, na região de compactação há grande interação entre as partículas e também é perceptível a variação de concentração de sólidos ao longo da região.

Analisando a Figura 2.4, pode-se observar quatro instantes distintos em um teste de sedimentação em batelada. Num primeiro momento, tem-se uma mistura praticamente homogênea, mas com o decorrer do experimento as partículas sólidas maiores começam a sedimentar, formando uma camada fina de sólidos mais pesados no fundo do recipiente. Aos poucos forma-se, assim, a camada de compactação. No instante de tempo $t = t_2$, é possível visualizar uma camada de compactação maior, seguida de uma grande região de sedimentação livre, contendo partículas mais finas cuja velocidade de sedimentação é baixa. Ao final do ensaio apresentam-se apenas as camadas de compactação e uma camada de água clarificada.

Um gráfico típico de um ensaio de proveta é apresentado na Figura 2.5, cuja construção se dá a partir da observação da altura das regiões na proveta e o instante de tempo.

Os espessadores convencionais, que operam de maneira contínua, podem ser descritos como tanques cilíndricos, com diâmetros que variam de 2 a 200 m e têm de 1 a 7 m de profundidade. Detalhes sobre esse equipamento e seus tipos serão dados na Seção 3.1.

2.2.1.2 Sedimentação Centrífuga

A separação centrífuga pode ser tratada como uma extensão da separação gravítica, uma vez que as taxas de sedimentação das partículas sólidas são aumentadas devido à presença da

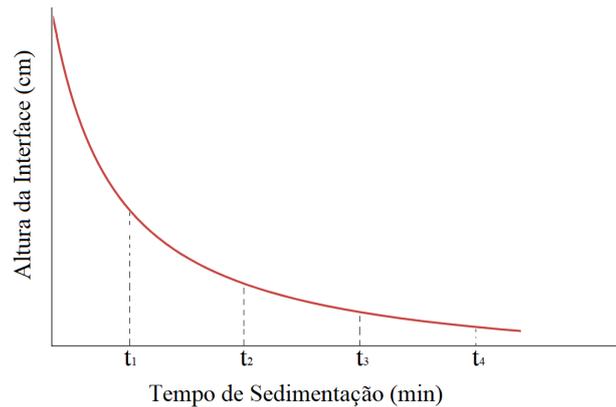


Figura 2.5: Curva típica de um ensaio de sedimentação em batelada.
 Fonte: Adaptado de Luz *et al.* (2010).

força centrífuga (WILLS e FINCH, 2015). Esse tipo de sedimentação pode ser feito tanto em hidrociclones quanto em centrífugas.

Como reportado em Wills e Finch (2015), o custo e a simplicidade do hidrociclone o torna muito atrativo. No entanto, até mesmo hidrociclones de pequeno porte possuem baixa eficiência, pois permitem a presença de partículas finas no *overflow* e apresentando baixas concentrações de sólidos no *underflow*. Técnicas auxiliares, como floculação para a agregação de partículas finas são ineficientes, pois existem forças de cisalhamento no interior dos equipamentos que quebram facilmente qualquer aglomerado presente.

Em substituição aos hidrociclones, pode-se usar as centrífugas. São equipamentos muito mais complexos e caros, apresentando desempenho muito superior quanto à capacidade de clarificação e concentração de sólidos obtidas.

Sugere-se a leitura de Wills e Finch (2015) e Metso Corporation (2018) para compreensão do princípio de funcionamento e detalhes dos equipamentos de desaguamento baseados em sedimentação centrífuga.

2.2.2 Filtragem

A filtragem é um método de desaguamento que utiliza meios porosos para a separação sólido-líquido. Há basicamente duas maneiras distintas de se realizar a filtração de polpas minerais: a colmatação, em que a polpa percola uma matriz porosa rígida que impede a passagem de partículas sólidas. No segundo método, o material sólido se acumula no exterior do meio filtrante, formando a torta (LUZ *et al.*, 2010). Os filtros de torta são os mais amplamente utilizados no beneficiamento mineral (WILLS e FINCH, 2015).

A diferença de pressão através do material em processo de filtração é primordial para a realização do desaguamento. Sabe-se que a porosidade da torta tem influência direta nessa diferença de pressão (LUZ *et al.*, 2010). O que dita a porosidade da torta é a distribuição granulométrica das partículas. Portanto, tem-se que quanto menores os espaços interparticulares

(poros) maior será a queda de pressão através da torta.

A porcentagem de partículas sólidas e a distribuição granulométrica da polpa, juntamente com a umidade requerida da torta de filtração, influenciam diretamente na diferença de pressão requerida na operação. Quanto maior a diferença de pressão, maior o custo com equipamentos e consumo energético (LUZ *et al.*, 2010).

Entre os filtros mais usados, pode-se citar (LUZ *et al.*, 2010; WILLS e FINCH, 2015):

- **Filtro a vácuo:** há diversos tipos de filtros à vácuo, mas todos operam obedecendo o mesmo princípio físico, em que a diferença de pressão entre o tanque de polpa e a superfície do meio filtrante é gerada por um meio filtrante. Filtros a vácuo podem ser contínuos ou descontínuos;
- **Filtro prensa:** são constituídos de quadros e placas, separadas entre si pelo meio filtrante. Sua operação é caracteristicamente descontínua;
- **Filtro hiperbárico, de pressão e cerâmico:** esses filtros operam em pressão acima da atmosférica. A necessidade de se trabalhar com esse tipo de filtro se dá, principalmente, pela tendência de moagens mais finas de minérios em usinas concentradoras.

2.2.3 Secagem

A secagem dos concentrados é a última operação realizada no processamento mineral (WILLS e FINCH, 2015), reduzindo os custos com transporte. Geralmente, usam-se secadores térmicos rotativos, que consistem de uma longa estrutura cilíndrica montada em rolos e acionada a velocidades de até 25 rpm.

Quanto ao método de aquecimento, ele pode ser direto ou indireto (WILLS e FINCH, 2015). Quando gases aquecidos passam pelo material no secador, tem-se o método direto. O método indireto, por outro lado, aquece externamente uma estrutura contendo o material.

O produto da secagem é comumente estocado em pilhas até serem carregadas em caminhões ou vagões. Os *containers* devem ser fechados, caso não seja possível, a superfície do produto deve ser selada com uma solução de modo a evitar perdas de poeira (WILLS e FINCH, 2015).

2.3 Conclusão

Nesse capítulo foi abordado o processo de tratamento mineral, com uma temática voltada para a operação unitária de desaguamento. Tratou-se também das três etapas de separação sólido-líquido comumente realizada em usinas de beneficiamento de minérios: a sedimentação, a filtração e a secagem, apresentando uma maior riqueza de detalhes na operação de sedimentação, objeto de interesse do presente trabalho.

3 Espessadores

Neste capítulo, apresentam-se os espessadores, equipamentos utilizados para aumentar a concentração de sólidos de suspensões por sedimentação. São equipamentos relativamente baratos (Figura 2.3), e se destacam pela capacidade de processar grandes quantidades de material.

A área de uma unidade de espessamento tem papel fundamental na determinação da sua capacidade. Geralmente, essa área é determinada levando-se em consideração a taxa de sedimentação dos sólidos na suspensão (LUZ *et al.*, 2010). Ao sedimentar, as partículas sólidas da polpa atravessam zonas cuja concentração de sólidos é variável. Assim, em zonas intermediárias existentes entre o limite superior (descarga) e inferior (alimentação) de concentração, cada partícula enfrentará diferentes taxas de sedimentação. A zona responsável pelo dimensionamento da unidade é a que exibir a menor taxa de sedimentação (LUZ *et al.*, 2010).

As unidades espessadoras podem trabalhar tanto em operação contínua quanto descontínua. As unidades contínuas podem ter a função de espessar e também de clarificar líquidos. Sua capacidade está atrelada à sua habilidade de processar suspensões em qualquer das duas funções citadas (LUZ *et al.*, 2010).

Espessadores contínuos foram inventados há mais de um século, sendo que o *Espessador original de Dorr* foi criado em 1905 (CONCHA, 2014). No entanto, tal equipamento não mudou tanto, se tornando maior e construído de materiais diferentes (madeira, aço e cimento). Além disso, o sistema de braços raspadores (*rakes*) — também chamados de rastelos ou ancinhos — foi melhorado e modernizado (CONCHA, 2014; LUZ *et al.*, 2010).

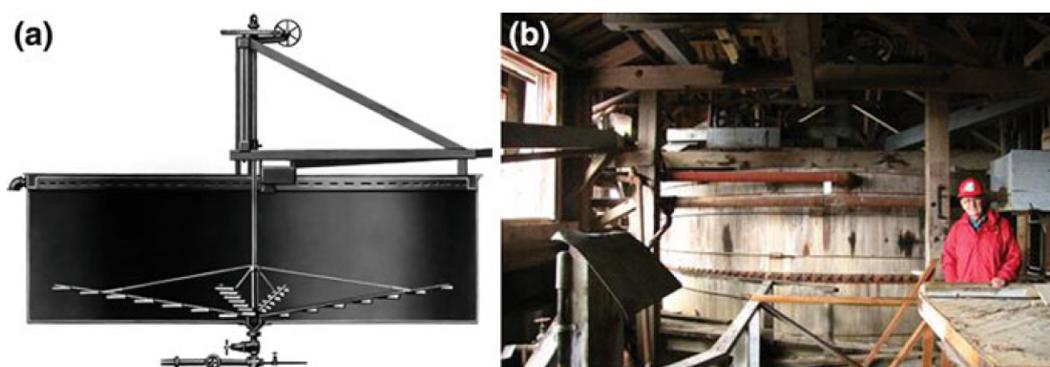


Figura 3.1: O primeiro espessador. (a) Esquemático e (b) foto do espessador original de Dorr. Fonte: Concha (2014).

A Figura 3.1 apresenta o *Espessador original de Dorr*, composto por um tanque cilíndrico de 6 metros de diâmetro, além do poço de alimentação, a caneleta de descarga do *overflow*, os rastelos e a descarga do *underflow*. Todos esses elementos do espessador original ainda são comuns aos espessadores atuais.

Espessadores com menos de 30 metros de diâmetro podem ter seus tanques fabricados de metal ou madeira, enquanto tanques com até 150 metros de diâmetro são feitos de concreto

(CONCHA, 2014). O fundo dos espessadores, feitos com o mesmo material do tanque, são cônicos no centro, para que seja facilitada a drenagem dos sedimentos.



Figura 3.2: Espessador convencional de 125 metros de diâmetro.
Fonte: Concha (2014).

O sistema de raspagem constitui o maior custo de um espessador (LUZ *et al.*, 2010), sendo responsáveis por transportar os sedimentos até o ponto de descarga. Os *rakes* podem ter diversas estruturas de sustentação, podendo ser acoplados à estrutura de sustentação do tubo de alimentação, por exemplo (CONCHA, 2014; LUZ *et al.*, 2010). Os *rakes* podem ter um motor centralizado ou um sistema de rastreamento periférico, tendo sua rotação na ordem de uma revolução por hora (CONCHA, 2014). Na maioria dos espessadores modernos, os *rakes* levantam automaticamente caso o torque monitorado eletronicamente no motor exceda um determinado valor, como apresentado na Figura 3.3, por exemplo.

O poço de alimentação, ou *feedwell*, é um pequeno cilindro concêntrico posicionado em até 1 metro da superfície em espessadores convencionais e projetado para misturar a polpa proveniente da alimentação com floculante (CONCHA, 2014; WILLS e FINCH, 2015). Além disso, a turbulência proveniente da alimentação é reduzida no poço de alimentação. Isso é alcançado com a entrada da polpa no poço por orifícios tangenciais e defletores internos (Figura 3.4).

O fluido sobrenadante é despejado pelo topo do espessador através de canaletas. Essas canaletas do *overflow*, posicionadas ao redor do tanque, recebem a água recuperada da polpa e a evacua lentamente para que partículas sólidas finas não sejam arrastadas. As Figuras 3.6 e 3.7 apresentam o posicionamento dessas canaletas em um espessador convencional e um espessador de lamelas, respectivamente.

3.1 Tipos de Espessadores

Diferentes tipos de espessadores distinguem entre si principalmente na geometria ou na forma de alimentação do equipamento (LUZ *et al.*, 2010). No entanto, as opções de espessadores aumentaram nas últimas duas décadas devido ao desenvolvimento de espessadores sem

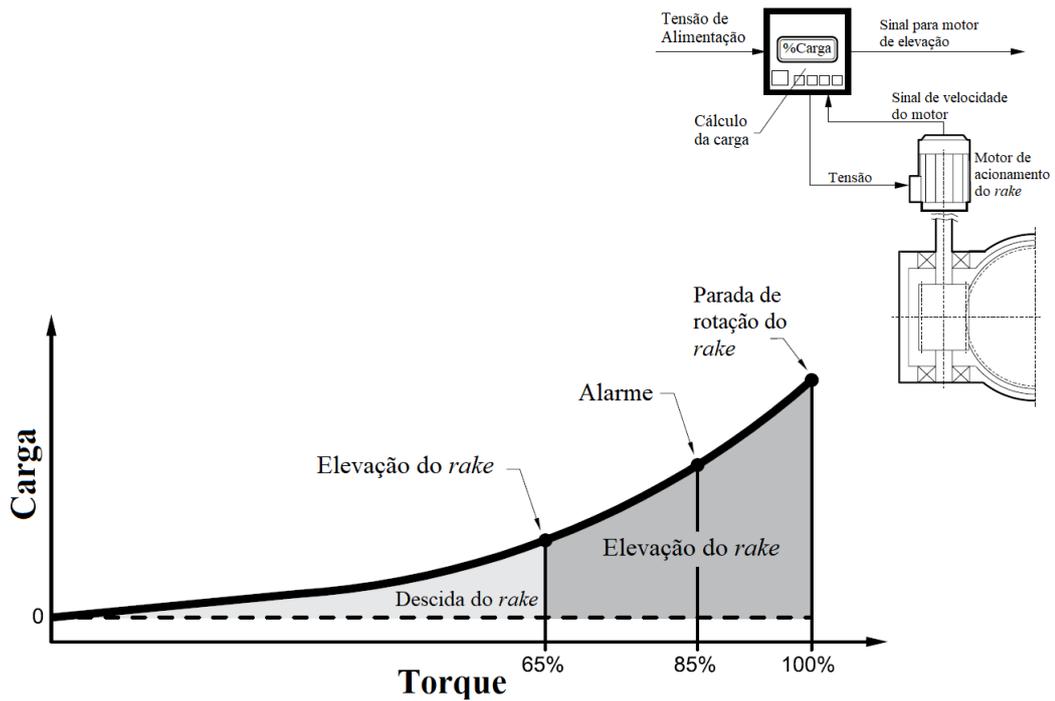
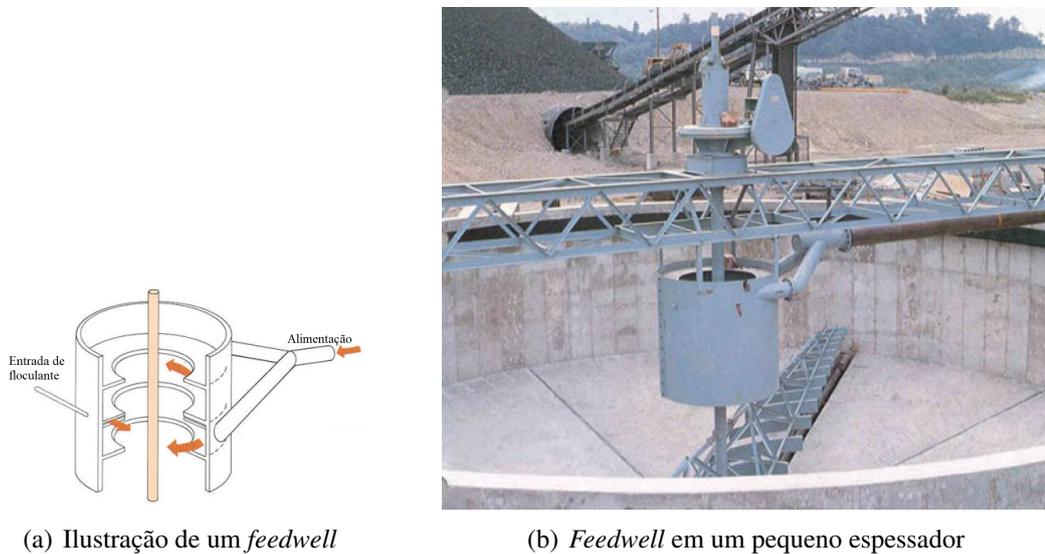


Figura 3.3: Curva de variação do torque e medidas de segurança tomadas e circuito eletrônico para a operação dos rakes.

Fonte: Adaptado de Metso Corporation (2018).



(a) Ilustração de um *feedwell*

(b) *Feedwell* em um pequeno espessador

Figura 3.4: Poço de alimentação com suas entradas tangenciais e defletores internos.

Fonte: Adaptado de Concha (2014).

rakes e também devido à necessidade/habilidade de produzir um *underflow* não newtoniano que, diferentemente dos fluidos newtonianos, não assumem a forma do recipiente em que são colocados (ADAMS, 2016). Fluidos newtonianos comportam-se essencialmente como um líquido.

Adams (2016), convenientemente, dividiu os espessadores em quatro grupos principais:

- Espessadores convencionais, ou de alta capacidade (*high-rate*);
- Espessadores sem *rakes*, ou ultra-alta capacidade (*ultra-high-rate*);
- Espessadores de alta densidade (*high-density*);
- Espessadores cônicos (*deep-cone*).

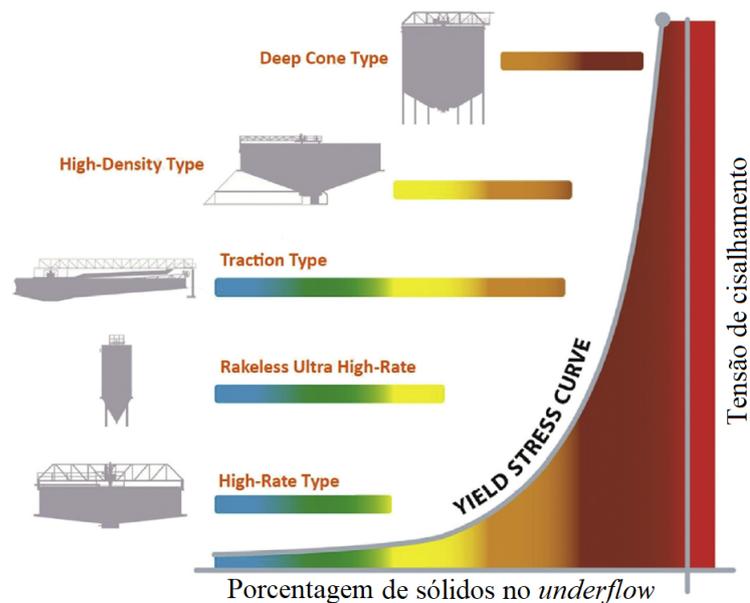


Figura 3.5: Comparação de *underflow* produzido por diferentes tipos de espessadores.

Fonte: Adaptado de Adams (2016).

A tensão de cisalhamento é uma importante variável quando fala-se em fluidos newtonianos e não newtonianos. Essa pode ser entendida como a pressão necessária para que um fluido não newtoniano comece a se mover (ADAMS, 2016; LUZ *et al.*, 2010). Na Figura 3.5 é apresentada a curva de tensão de cisalhamento (*yield stress*) em função da porcentagem de sólidos.

Espessadores convencionais produzem polpa com a menor densidade e menor tensão de cisalhamento (abaixo de 20 Pa), enquanto os espessadores cônicos produzem polpas no *underflow* com a maior tensão de cisalhamento, podendo chegar a até 150 Pa (ADAMS, 2016).

Cada tipo de espessador pode variar quanto a diferentes critérios de dimensionamento, inclinação do fundo, torque de acionamento e formato do tanque com o intuito de atender as características do produto descarregado no *underflow* (ADAMS, 2016). Uma descrição de cada tipo de espessador é apresentada a seguir.

3.1.1 Espessador Convencional

Um espessador convencional pode ter diferentes modos de operação, fazendo com que algumas bibliografias o dividam em subtipos. No entanto, a vista lateral de um espessador

desse tipo costuma ser como a apresentada na Figura 3.6, em que é possível visualizar detalhes sobre a sua estrutura e mecanismos de operação. A inclinação do fundo desse equipamento não ultrapassa o intervalo de 5° a 9°.

Quando a polpa entra no poço de alimentação do espessador, ela é diluída por um fluxo ascendente de água de modo a formar a chamada concentração conjugada (CONCHA, 2014). A suspensão diluída sedimenta à velocidade constante até formar o concentrado no fundo do tanque.

Esses equipamentos podem, ainda, ser classificados em espessadores de alta capacidade. São muitos semelhantes ao contínuo convencional, possuindo, no entanto, modificações estruturais de projeto para a promoção do aumento da capacidade do equipamento. Duas modificações amplamente conhecidas são (LUZ *et al.*, 2010):

- **Espessadores de lamelas:** espessador de alta capacidade com inserção de uma série de placas inclinadas (lamelas), dispostas lado a lado, formando canais. Tem-se como principal vantagem nesse equipamento a economia de espaço. Espessadores convencionais possuem capacidade de sedimentação muito inferior a esse tipo de configuração, uma vez que a área efetiva de sedimentação dos espessadores de lamelas é dada pela soma das áreas projetadas de cada lamela. Além disso, o tempo de sedimentação é proporcional à altura de queda vertical. Assim, o espessador de lamelas ainda apresenta a vantagem de apresentar rápida sedimentação de partículas. A Figura 3.7 exhibe em detalhes um espessador em lamelas.
- **Espessador com alimentação submersa:** Há ainda espessadores em que a alimentação é realizada dentro da região de compactação. Essa configuração elimina a necessidade da sedimentação livre das partículas sólidas, uma vez que são alimentadas dentro de uma região de poupa adensada. Com isso, as partículas sólidas são aprisionadas, enquanto o líquido percola o leito em movimento ascendente, direcionado ao líquido clarificado.

3.1.2 Espessador sem *rakes*

O tanque desses espessadores é construído em aço, com diâmetros de até 12 metros. Sua zona de clarificação geralmente é mais profunda que em espessadores convencionais. Além disso, esses equipamentos apresentam um piso com inclinação de 60° (ADAMS, 2016).

Por não possuírem mecanismo de raspagem, os *rakes*, os espessadores de ultra-alta capacidade possuem cones e peculiaridades internas que melhoram a migração da água para cima e para fora da zona de compactação.

3.1.3 Espessador de alta densidade

Construídos tanto de aço quanto de concreto, os espessadores de alta densidade podem ser construídos enterrados ou externos ao solo, sendo as condições locais e o diâmetro do equipamento utilizados para determinar a forma de construção (ADAMS, 2016).

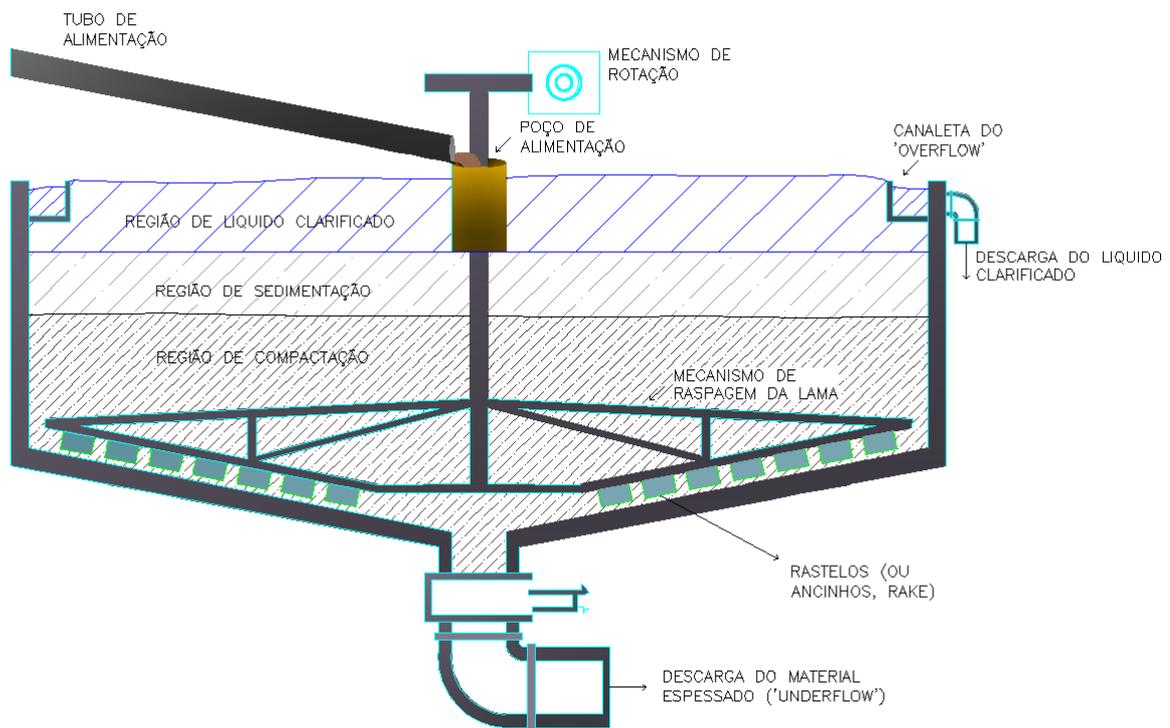


Figura 3.6: Vista lateral de um espessador convencional.
Fonte: O autor.

Com leitos mais profundos e tempo de retenção dos sólidos maior que dos espessadores convencionais, os espessadores de alta densidade são projetados com inclinação do fundo variando entre 14° e 20° (ADAMS, 2016). Além disso, o projeto desses espessadores leva em conta a profundidade do leito e o tempo de retenção dos sólidos para fornecer o produto esperado.

O mecanismo de raspagem geralmente não utiliza de elevadores para os *rakes*, sendo utilizadas ferramentas que possibilitam que os *rakes* fiquem dentro do leito espesso mesmo quando a concentração de sólidos é excedida (ADAMS, 2016).

3.1.4 Espessador cônico

Construídos externamente ao solo, os espessadores cônicos são fabricados em aço. O seu diâmetro máximo não ultrapassa 24 metros e o fundo pode ter inclinação entre 30° e 45° (ADAMS, 2016).

A diferença principal desse espessador para o de alta densidade está no tempo de residência dos sólidos (ADAMS, 2016), com tempo de residência maior, a concentração de sólidos nesse equipamento pode ser a mais alta entre os espessadores aqui abordados.

3.2 Conclusão

Nesse capítulo foram abordados os diferentes tipos de espessadores e detalhes das suas geometrias. O presente trabalho modela e simula espessadores do tipo convencional.

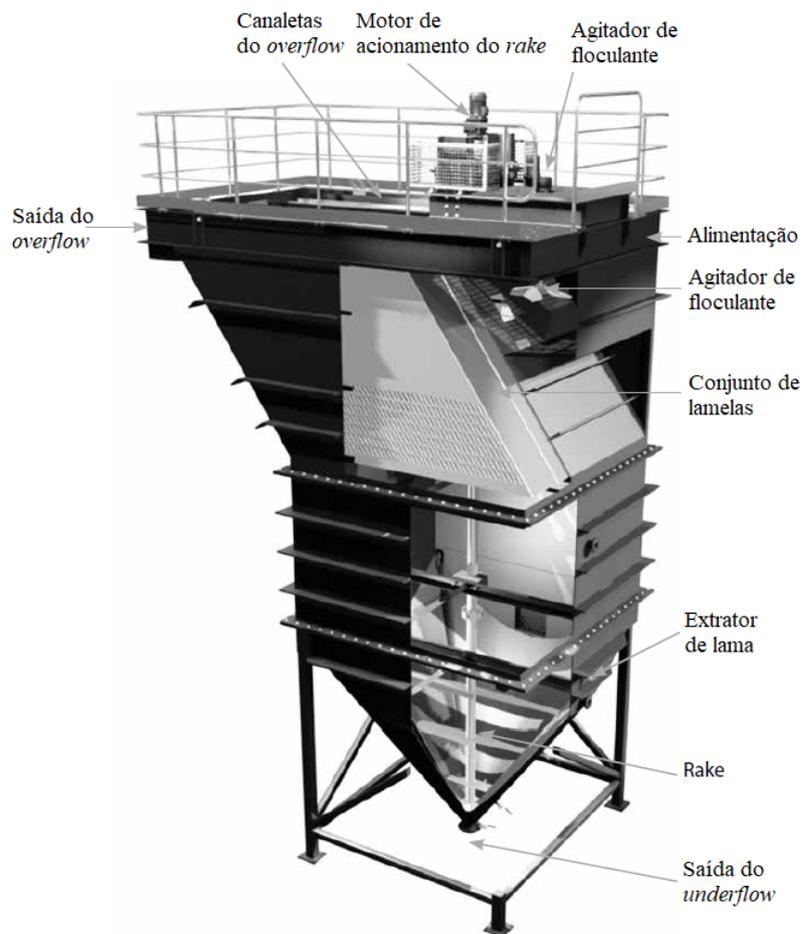


Figura 3.7: Espessador de alta capacidade de lamelas em detalhes.
Fonte: Adaptado de Metso Corporation (2018).

4 Agregação de Partículas

A operação de espessamento tem seu desempenho dependente da granulometria das partículas presentes na polpa a ser espessada. A velocidade de sedimentação das partículas é maior quando trabalha-se com partículas com maior granulometria.

Para uma única partícula esférica incompressível de diâmetro D e densidade ρ_s suspensa em um fluido em regime laminar de densidade ρ_f e viscosidade μ_f , a velocidade de sedimentação, também chamada de velocidade terminal (LUZ *et al.*, 2010), é dada pela velocidade de Stokes (BETANCOURT *et al.*, 2014)

$$v_{Sed} = \frac{D^2(\rho_s - \rho_f)g}{18\mu_f}$$

em que g é a aceleração da gravidade.

A equação de Stokes evidencia a importância de aplicar técnicas de agregação de partículas para aumentar a velocidade de sedimentação e, conseqüentemente, a eficiência do espessamento.

A operação de concentração é fortemente dependente da moagem, para que a liberação apropriada seja alcançada. Infelizmente, a moagem excessiva é inevitável, produzindo, assim, partículas coloidais. Essas partículas apresentam dimensões inferiores a $1 \mu m$. Conforme apresentado em Luz *et al.* (2010), a velocidade de sedimentação de uma partícula de $1 \mu m$ é de aproximadamente $1 mm/hora$ ao passo que uma partícula coloidal de $0,01 \mu m$ sedimenta com uma velocidade de $1 mm/ano$.

Em uma planta de processamento mineral, tanto a operação de espessamento quanto a filtração podem ser favorecidas com a prévia agregação das partículas. Caso a polpa contenha partículas coloidais, o desempenho e a capacidade dos equipamentos dependem da eficiência do processo de agregação (LUZ *et al.*, 2010).

O processo de agregação pode ser feito de três maneiras distintas, cada uma baseada em diferentes processos, são elas: coagulação, floculação e aglomeração (CONCHA, 2014). Em operações de separação sólido-líquido, apenas a coagulação e a floculação são aplicadas (LUZ *et al.*, 2010).

A coagulação reduz as forças eletrostáticas superficiais de natureza repulsiva das partículas. O agregado resultante é chamado de coágulo. A floculação geralmente forma flocos a partir da ação de um polímero de elevado peso molecular que adsorve-se simultaneamente na superfície de múltiplas partículas. Por fim, a aglomeração usa hidrocarbonetos oleosos para aglomerar partículas hidrofóbicas suspensas em água, produzindo aglomerados hidrofóbicos.

4.1 Coagulação

A coagulação faz com que partículas coloidais extremamente finas adiram diretamente uma à outra, todas exercendo forças mútuas de atração, conhecidas como forças de Van der

Waals (WILLS e FINCH, 2015). Essas forças são efetivas apenas para distâncias muito curtas e, normalmente, a adesão por forças de Van der Waals é prevenida pela presença de cargas elétricas na superfície dos sólidos, gerando forças repulsivas entre as partículas.

A maioria das partículas minerais suspensas em água com pH neutro possuem cargas superficiais negativas (CONCHA, 2014). Os coagulantes são eletrólitos com cargas opostas às das partículas e, quando dispersados na suspensão, causam a redução ou até mesmo a neutralização das cargas. Isso faz com que as partículas entrem em contato e adiram, como resultado das forças moleculares.

Consegue-se a coagulação por meio da adição de eletrólitos inorgânicos multivalentes, usando-se geralmente cátions hidrolisáveis. Mais detalhes sobre o processo de agregação por coagulação podem ser encontrados em Concha (2014); Luz *et al.* (2010); Wills e Finch (2015).

4.2 Floculação

Hogg (2000) define a floculação como um processo de agregação de partículas finas em unidades maiores, os flocos. Existem diversos tipos de floculação, dependendo da forma como os polímeros agem nas partículas (CONCHA, 2014).

A floculação por pontes, ou *bridging flocculation*, é considerada o tipo mais importante, em que pequenas quantidades de grandes floculantes em cadeia são adsorvidos por muitas partículas simultaneamente, como mostra a Figura 4.1a. Em concentrações de floculantes maiores que as necessárias, os polímeros adsorvem completamente em uma única partícula, reduzindo a possibilidade de adsorção em outras partículas, o que reestabiliza a suspensão (CONCHA, 2014). Assim, há doses ótimas de floculantes poliméricos.

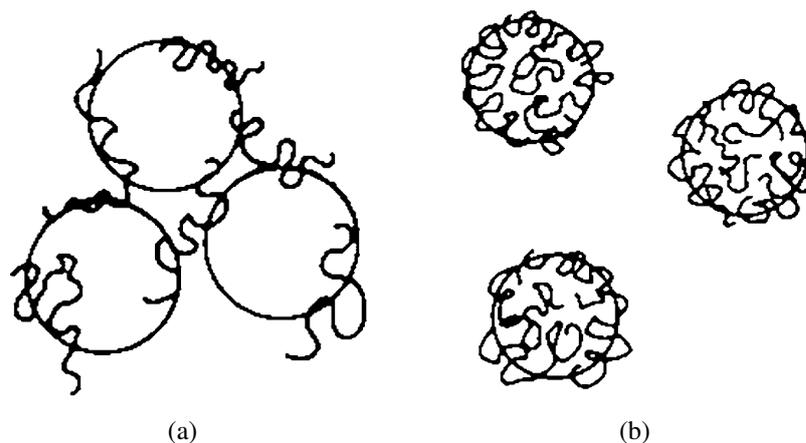


Figura 4.1: Floculação por pontes. (a) Funcionamento adequado do processo. (b) Reestabilização por excesso de floculante.

Fonte: Concha (2014).

Outro tipo de floculação existente é a floculação em rede. Nesse caso, se um ou mais

polímeros lineares adsorvem nas partículas, um gel se forma juntamente com uma rede tridimensional (CONCHA, 2014).

No caso da floculação em pelotas, que combina com um controle rigoroso quantidades de floculantes ramificados e lineares, são formados flocos muito compactos, conhecidos como pelotas (CONCHA, 2014).

Há também a floculação por reversão localizada de carga, em que um polímero com elevada densidade de carga e peso molecular médio ou baixo, interage com uma superfície com baixa intensidade de carga oposta (LUZ *et al.*, 2010), com isso a carga elétrica na área de superfície coberta pelo polímero é revertida (Figura 4.2). A superfície da partícula passa a apresentar uma distribuição heterogênea de cargas. Os flocos se formam com a colisão entre regiões de cargas opostas em duas partículas.

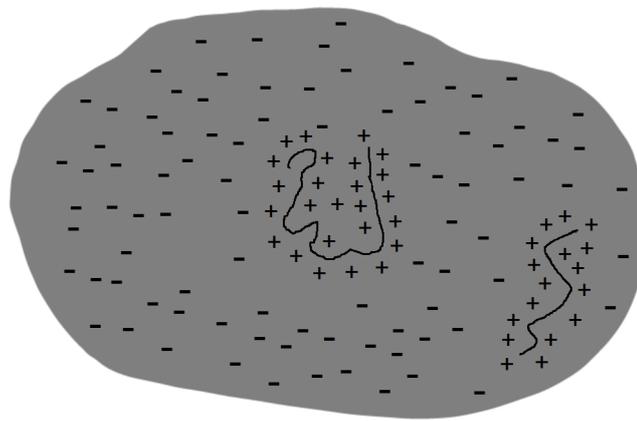


Figura 4.2: Adsorção de um polímero catiônico em uma superfície com carga negativa.
Fonte: Adaptado de Luz *et al.* (2010).

Luz *et al.* (2010) cita ainda a floculação por neutralização de cargas, em que a molécula do polímero tem baixa densidade de carga, apenas o necessário para neutralizar a carga oposta da superfície mineral, o que reduz a repulsão eletrostática entre as partículas.

4.2.1 Etapas no processo de floculação

Em geral, o processo de floculação envolve três etapas (HOGG, 2000):

1. **Desestabilização das partículas suspensas:** Geralmente controlado pela modificação do pH;
2. **Formação de flocos e crescimento:** Consiste na adsorção de partículas finas em polímeros de alto peso molecular (Floculação por pontes);
3. **Desagregação dos flocos:** quebra dos flocos devido a forças de cisalhamento, turbulência, entre outras.

4.2.1.1 Desestabilização da suspensão

As partículas finas encontradas em tratamento de minérios geralmente apresentam um nível significativo de estabilidade, tendendo a resistir à agregação (HOGG, 2000). A principal causa dessa estabilização reside no fato de as partículas sólidas adquirirem carga elétrica em meio aquoso. A desestabilização pode ser alcançada eliminando ou blindando essas cargas.

A carga nas partículas de minério suspensas em água geralmente provém de interações eletroquímicas entre o sólido e a solução aquosa em seu entorno. Essa carga pode ser eliminada por meio de modificações no pH da suspensão ou na adição de eletrólitos para blindagem (HOGG, 2000).

4.2.1.2 Formação de flocos

Uma vez realizada a desestabilização das partículas finas na suspensão, essas podem aderir-se uma à outra com o contato. As partículas em movimento em relação uma à outra colidem entre si, possibilitando o crescimento de flocos. Esses movimentos são provenientes de (HOGG, 2000):

- Movimento browniano resultante da energia térmica no fluido de suspensão;
- Gradientes de velocidade em suspensões agitadas mecanicamente;
- Sedimentação diferencial de partículas ou flocos individuais.

Hogg (2000) indica que os movimentos brownianos dominam partículas em estágios iniciais de agregação (partículas muito finas), enquanto os efeitos da agitação são mais sentidos em estágios mais avançados do crescimento, em que os flocos existentes agregam-se para formar flocos maiores.

4.2.1.3 Desagregação dos flocos

A agitação da suspensão durante o processo de adição de polímeros flocculantes contribui significativamente na velocidade de formação dos flocos, pois contribui para a colisão das partículas. No entanto, a partir de uma determinada velocidade crítica, a agitação pode causar a quebra dos flocos devido às forças de cisalhamento (LUZ *et al.*, 2010). Além disso, quanto maior o agregado, mais facilmente ele se desagrega e, portanto, a velocidade crítica diminui com o crescimento do floco. Assim, pode-se controlar o tamanho do floco por meio da manipulação da velocidade de agitação da suspensão.

Conclui-se que, para realizar testes de floculação é necessário trabalhar com um rigoroso controle do sistema de agitação, pois o sistema hidrodinâmico é um fator determinante para as características dos flocos produzidos (HOGG, 2013; LUZ *et al.*, 2010).

4.2.2 Características dos flocos

As características e estrutura dos flocos formados por floculação podem ser controladas por meio da seleção do tipo de floculação aplicado (LUZ *et al.*, 2010). A Figura 4.3 apresenta flocos formados por diferentes tipos de floculação.

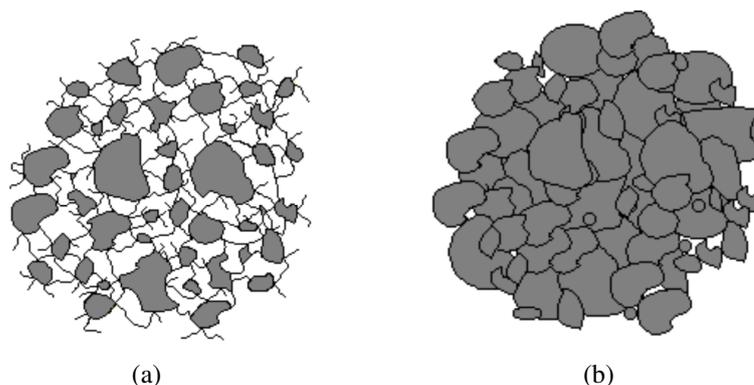


Figura 4.3: Diferentes estruturas de flocos: **(a)** Aberto; **(b)** Fechado.
Fonte: Luz *et al.* (2010).

O flocado aberto, na Figura 4.3, é formado por floculação por pontes, em que as partículas não se tocam (LUZ *et al.*, 2010). Nesse tipo de sistema, os flocos crescem rapidamente e possuem forma helicoidal. Além disso, essas estruturas são grandes e flexíveis. Como aprisionam água em seu interior, a densidade média é reduzida. Ainda assim, os flocos apresentam alta velocidade de sedimentação, fazendo com que esse tipo de floculação seja apropriado para operações de espessamento (LUZ *et al.*, 2010).

O flocado fechado é produzido a partir de floculação por reversão localizada de carga. Diferentemente do caso anterior, existe o contato direto entre as partículas. Esses flocos tem semelhanças com os flocos formados por coagulação, tendo como características a lentidão na formação, formato esférico, tamanho uniforme, pequeno, compacto, rígido, denso e permeável. A utilização desse tipo de floculação é mais apropriado para processos de filtragem (LUZ *et al.*, 2010).

Luz *et al.* (2010) argumenta ainda que a resistência de um flocado cresce com a quantidade de pontos de contato da molécula com a superfície. Subentende-se, portanto, que flocos formados por floculação por pontes são desagregados com mais facilidade que os formados por reversão localizada de carga.

4.3 Conclusão

Foram tratadas neste capítulo as metodologias atuais de agregação de partículas, descrevendo-se as etapas necessárias ao processo. O conteúdo abordado é base para compreensão e modelagem matemática do processo de floculação em espessadores.

5 Modelo de Espessador Cilíndrico Sujeito à Adição de Floculante

Modelar sistemas de espessadores contínuos tem se mostrado uma tarefa complexa. O trabalho desenvolvido em Kynch (1952) é um dos mais importantes, se tornando uma ferramenta essencial tanto para uso industrial quanto para pesquisa e desenvolvimento de modelos mais completos de equipamentos de sedimentação.

Considera-se uma polpa, contida em um reservatório. Para que essa suspensão seja considerada ideal, é preciso que (CONCHA, 2014):

1. todas as partículas sólidas sejam de mesmo tamanho, forma e densidade, além de serem consideradas pequenas em relação ao reservatório que as contém;
2. o sólido e o fluido sejam incompressíveis;
3. não haja transporte de massa entre sólido e fluido;
4. a velocidade relativa entre sólido e fluido é uma função dependente unicamente da concentração de sólidos.

Pode-se estabelecer uma única velocidade de sedimentação para todas as partículas levando em consideração as suposições 1 e 3. A incompressibilidade (suposição 2), garante densidades constantes para os materiais componentes da suspensão. Por fim, o item 4 é uma suposição constitutiva para a velocidade de sedimentação que faz desnecessário o uso de balanços de momento.

Kynch (1952) descreve a sedimentação de uma suspensão ideal contendo esferas rígidas, pequenas e de mesmo tamanho em um fluido viscoso (BETANCOURT *et al.*, 2014). A teoria de Kynch é estendida para um modelo completo em Bürger *et al.* (2005). Nesse modelo é incorporada a compressibilidade dos sedimentos, além da modelagem da alimentação, *overflow* e mecanismos de descarga por variações espaciais descontínuas nos fluxos. A Figura 5.1 apresenta um esquemático do espessador modelado em Betancourt *et al.* (2014). Os índices da fração volumétrica de sólidos (ϕ) e a vazão volumétrica (Q) são f , e e u , que representam, respectivamente, a alimentação, o efluente, e o *underflow*.

Trata-se de um modelo simplificado, unidimensional, descrito por uma equação diferencial parcial (EDP) não linear para a fração do volume de sólidos ϕ (ou concentração de sólidos) em função da profundidade z e o tempo t , dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} F(\phi, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma(z) d(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{Q_f(t) \phi_f(t)}{A} \delta(z) \quad (5.1)$$

em que

- F incorpora os fluxos de entrada e saída no reservatório com uma suposição constitutiva sobre o fluxo de sedimentação;

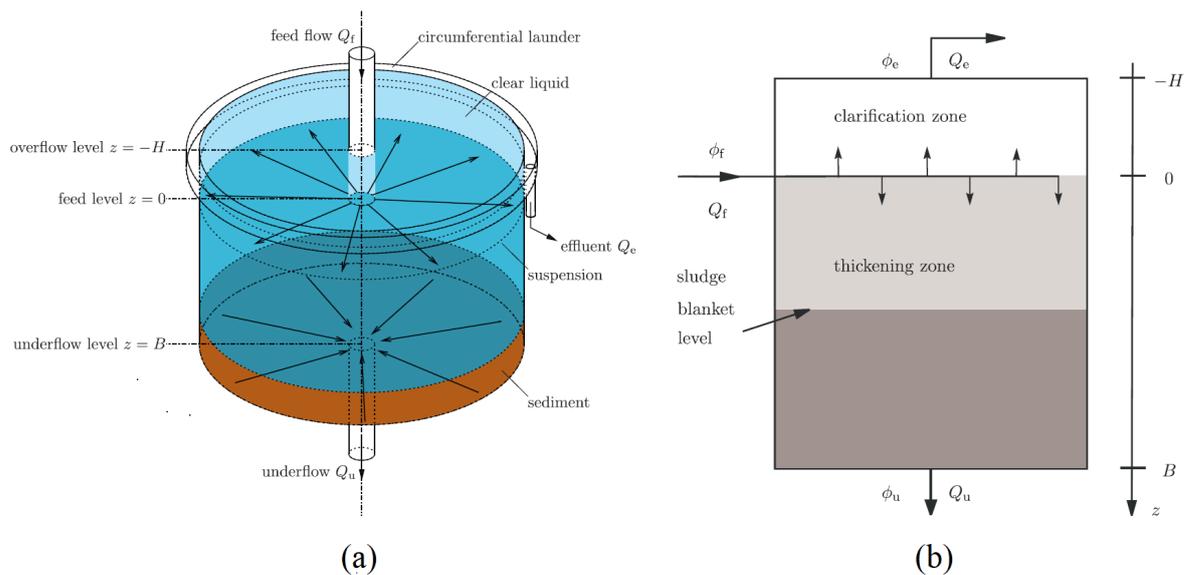


Figura 5.1: Ilustração esquemática de um espessador. **(a)** Princípio de operação. **(b)** modelo unidimensional idealizado.

Fonte: Betancourt *et al.* (2014).

- d modela a compressão dos sólidos em altas concentrações, além de incluir uma suposição constitutiva da função de tensão efetiva dos sólidos (*effective solid stress function*);
- γ é um parâmetro que indica se z é um nível dentro ($\gamma = 1$) ou fora ($\gamma = 0$) do espessador;
- A é área da seção transversal, considerada constante nesse modelo;
- δ é a função delta de Dirac, que modela a alimentação em $z = 0$;

Destaca-se em Betancourt *et al.* (2014) que o modelo desenvolvido por Bürger *et al.* (2005) diferencia-se de modelos prévios por incluir a zona de clarificação (Figura 5.1). Nos modelos anteriores, trata-se apenas da zona de espessamento e descrevem-se os mecanismos de alimentação, *overflow* e *underflow* apenas por condições de contorno. Ao incluir a região de clarificação, pode-se lidar com situações em que há a sobrecarga do espessador. Assim, é possível descrever a dinâmica de espessadores operando em modo de alta capacidade.

Como reportado no Capítulo 4, realiza-se a agregação de partículas por meio da adição de floculantes para aumentar a velocidade de sedimentação das partículas sólidas em uma suspensão. Em Betancourt *et al.* (2014), desenvolveu-se um modelo baseado no modelo de Bürger *et al.* (2005) considerando-se uma suspensão floculada. Esse modelo leva em consideração as mudanças nas propriedades físicas das partículas sólidas que entram no espessador-clarificador. É descrita uma EDP adicional que descreve uma quantidade escalar correspondente à velocidade de sedimentação livre determinada pelo estado de floculação que as partículas sólidas se encontram. Betancourt *et al.* (2014) descreve, de maneira simplificada, essa quantidade escalar como a concentração de floculante, que acompanha as partículas sólidas.

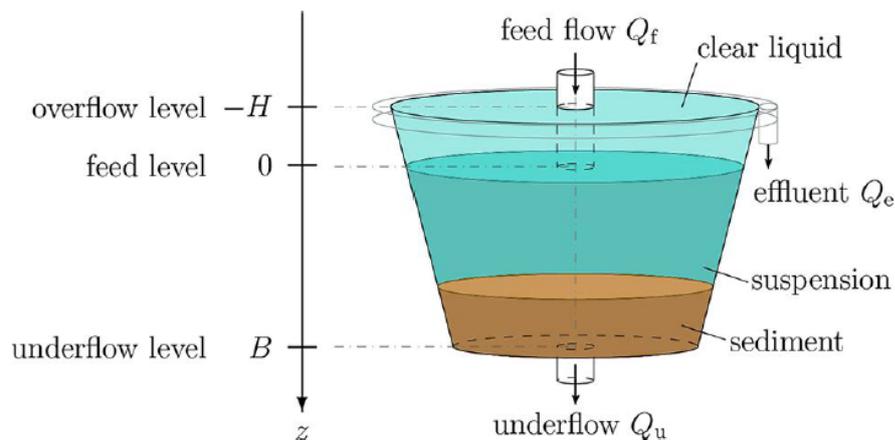


Figura 5.2: Ilustração esquemática de um tanque cônico.
 Fonte: Bürger *et al.* (2017).

Deve-se ressaltar que os modelos destacados até então, consideram os espessadores como tanques totalmente cilíndricos. Bürger *et al.* (2017) apresenta um modelo de sedimentação contínua para tanques com área de seção transversal variável, como mostrado na Figura 5.2. Dois aspectos desse modelo devem ser levados em consideração: espessadores/clarificadores convencionais apresentam formato cilíndrico em sua região superior e formato cônico na região de descarga, como mostra a Figura 3.6. Outro aspecto, ainda mais importante que o anterior, é o fato de Bürger *et al.* (2017) não tratar a adição de floculante ao seu modelo.

É pertinente investigar a possibilidade de combinar os trabalhos desenvolvidos em Betancourt *et al.* (2014) e Bürger *et al.* (2017) com o intuito de obter um modelo de espessador contínuo com representatividade mais fiel do comportamento dos equipamentos industriais.

5.1 Desenvolvimento Matemático

Considera-se um espessador ideal, como mostrado na Figura 5.1, com a vazão do *overflow* $Q_e \geq 0$ e a vazão do *underflow*, ou descarga, $Q_u \geq 0$. Com isso, tem-se que a vazão da alimentação é dada por $Q_f = Q_e + Q_u$. Além disso, a concentração de sólidos na alimentação, no *underflow* e no *overflow* são ϕ_f , ϕ_u e ϕ_e , respectivamente. Por fim, apresentam-se as zonas no equipamento, em função do eixo z :

- Zona de efluente: $z < -H$;
- Zona de Clarificação: $-H < z < 0$;
- Zona de espessamento: $0 < z < B$;
- Zona de *underflow*: $z > B$

Por ora, considera-se a área da seção transversal constante, como na Figura 5.1.

5.1.1 Modelo sem adição de floculante

Nessa seção desconsidera-se o efeito da adição de floculante. Trabalha-se, portanto, com o modelo desenvolvido em Bürger *et al.* (2005). A EDP descrita em (5.1), contém o termo F , ou função de fluxo convectivo, dada por (BETANCOURT *et al.*, 2014)

$$F(\phi, z, t) = \begin{cases} -Q_e(t)\phi/A, & \text{para } z < -H \\ -Q_e(t)\phi/A + v_{hs}(\phi)\phi, & \text{para } -H < z < 0 \\ Q_u(t)\phi/A + v_{hs}(\phi)\phi, & \text{para } 0 < z < B \\ Q_u(t)\phi/A, & \text{para } z > B \end{cases}$$

em que $v_{hs}(\phi)$ é a função de velocidade de sedimentação retardada, calculada por

$$v_{hs}(\phi) = v_{sed}V(\phi), \quad (5.2)$$

com V modelando o efeito retardante satisfazendo $V(0) = 1$ e tendo como variável dependente apenas a concentração de sólidos, ϕ . O cálculo dessa velocidade é dado por (RICHARDSON, 1954)

$$V(\phi) = (1 - \phi)^{n_{RZ}}$$

para aplicações em beneficiamento mineral. Considera-se usualmente $n_{RZ} > 1$.

Bürger *et al.* (2005) define a função de compressibilidade como

$$d(\phi) = \frac{v_{hs}(\phi)\sigma'_e(\phi)}{(\rho_s - \rho_f)g} \quad (5.3)$$

em que σ'_e é a derivada da função de tensão efetiva dos sólidos. Além disso, ρ_s e ρ_f são respectivamente as densidades do sólido e do líquido. Como apresentado em Betancourt *et al.* (2014), σ'_e satisfaz

$$\sigma'_e(\phi) \begin{cases} = 0, & \text{para } 0 \leq \phi \leq \phi_c \\ > 0, & \text{para } \phi > \phi_c \end{cases}$$

em que ϕ_c é a concentração crítica (dependente do material). Uma função σ_e típica é

$$\sigma_e(\phi) = \begin{cases} 0, & \text{para } \phi \leq \phi_c \\ \alpha e^{\beta\phi}, & \text{para } \phi > \phi_c \end{cases} \quad (5.4)$$

com α (Pa) e β sendo parâmetros que podem ser determinados por experimentos. A função γ indica se z está dentro ou fora do espessador

$$\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{para } -H \leq z \leq B \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Betancourt *et al.* (2014) apresenta a expressão para a concentração de saída do *overflow* como

$$\phi_e(t) := \phi(-H^-, t)$$

e a expressão para a concentração de saída de *underflow* sendo

$$\phi_u(t) := \phi(B^+, t).$$

Com essas notações, considera-se que a solução $\phi = \phi(z, t)$ é, em geral, descontínua em $z = -H$ e $z = B$. Essa consideração se deve ao fato de assumir-se que fora do espessador as partículas sólidas e o fluido movem-se a uma mesma velocidade. Pontua-se que Betancourt *et al.* (2014) utiliza essa notação $\phi(-H^-, t)$ para indicar que trabalha-se com o limite de $\phi(z, t)$ com z se aproximando de $-H$ partindo-se de uma região externa acima do espessador. Da mesma maneira, a notação $\phi(B^+, t)$ indica que computa-se o limite de $\phi(z, t)$ com z partindo de uma região externa abaixo do espessador até $z = B$.

5.1.2 Modelo para adição de floculante

A adição de floculante pode ser vista como uma propriedade das partículas sólidas que varia com o tempo (BETANCOURT *et al.*, 2014). A propriedade de interesse é a velocidade de sedimentação de cada partícula, definida pela dosagem de floculante, representada por $k = k(z, t)$, o qual é um número positivo adimensional representando essa propriedade.

O número k poderia ser um número entre 0 e 1. No caso de $k = 0$, tem-se que a velocidade de sedimentação das partículas é nula. Por outro lado, $k = 1$ significa que a velocidade de sedimentação das partículas é a maior possível. Essa velocidade máxima ocorre no caso em que a suspensão é floculada de maneira ótima, adicionando-se a dose adequada de floculante.

Pode-se estabelecer uma relação entre a velocidade de sedimentação descrita em (5.2) e a propriedade descrita por k , reescrevendo

$$\overline{v_{hs}}(\phi, k) = kv_0V(\phi) = kv_{hs}(\phi) \quad (5.5)$$

com $0 \leq k \leq 1$. Substituindo $v_{hs}(\phi)$ por $\overline{v_{hs}}(\phi, k)$ em (5.3), obtém-se a nova função de compressibilidade, dada por

$$\overline{d}(\phi, k) = \frac{kv_{hs}(\phi)\sigma'_e(\phi)}{(\rho_s - \rho_f)g} = kd(\phi).$$

Para fins de tratamento numérico, Bürger *et al.* (2005) define a primitiva da função d como

$$D(\phi) = \int_0^\phi d(s)ds. \quad (5.6)$$

Dessa forma, pode-se reescrever (5.1) como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{F}(\phi, k, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma(z) k \frac{\partial D(\phi)}{\partial z} \right) + \frac{Q_f(t) \phi_f(t)}{A} \delta(z) \quad (5.7)$$

em que \bar{F} é dada por

$$\bar{F}(\phi, z, t) = \begin{cases} -Q_e(t) \phi / A, & \text{para } z < -H \\ -Q_e(t) \phi / A + k v_{hs}(\phi) \phi, & \text{para } -H < z < 0 \\ Q_u(t) \phi / A + k v_{hs}(\phi) \phi, & \text{para } 0 < z < B \\ Q_u(t) \phi / A, & \text{para } z > B. \end{cases}$$

Pode-se definir que o fluxo total de partículas por unidade de área é dado por (BETANCOURT *et al.*, 2014)

$$\Phi \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial z}, k, z, t \right) = \bar{F}(\phi, k, z, t) - \gamma(z) k \frac{\partial D(\phi)}{\partial z},$$

como indicado na equação de conservação (5.7).

Tem-se que $k_f = k_f(t) \in [0, 1]$ descreve a variação no tempo da propriedade k . Além disso, o fluxo de partículas que carregam a propriedade $k_f(t)$ no tempo t é $k_f(t) \phi_f(t) Q_f(t)$. Betancourt *et al.* (2014), com o intuito de formular uma equação para a profundidade e a variação do tempo de $k(z, t)$, postula que

$$w(z, t) := k(z, t) \phi(z, t)$$

em que $w(z, t)$ é uma quantidade conservativa que descreve a concentração local de partículas sólidas que carregam a propriedade k consigo.

Para descrever uma EDP para o modelo, considera-se, agora, um intervalo de profundidade arbitrário (z_1, z_2) , com $\Phi|_{z=z_1}$ representando o fluxo total por unidade de área passando por $z = z_1$. Assim, o fluxo de partículas carregando a propriedade k passando por $z = z_1$ em um tempo t é $A k \Phi|_{z=z_1}$. Portanto, pelo Teorema de Transporte de Reynolds, tem-se que (BETANCOURT *et al.*, 2014)

$$\frac{d}{dt} \int_{z_1}^{z_2} A k(z, t) \phi(z, t) dz = A k (\Phi|_{z=z_1} - \Phi|_{z=z_2}) + \int_{z_1}^{z_2} k_f(t) Q_f(t) \phi_f(t) \delta(z) dz,$$

que, ao ser dividida por $A(z_2 - z_1)$ e fazendo o intervalo (z_1, z_2) suficientemente pequeno até um ponto z , obtém-se a EDP (BETANCOURT *et al.*, 2014)

$$\frac{\partial(k\phi)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \left(\bar{F}(\phi, k, z, t) - \gamma(z) k \frac{\partial D(\phi)}{\partial z} \right) \right) + \frac{Q(t) k_f(t) \phi_f(t)}{A} \delta(z). \quad (5.8)$$

Ao definir-se $w_f := k_f \phi_f$, realizar a substituição em (5.8) e unir essa nova equação a (5.7),

obtém-se o seguinte sistema de equações conservativas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\phi, w/\phi, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma(z) \frac{w}{\phi} \frac{\partial D(\phi)}{\partial z} \right) + \frac{Q_f(t) \phi_f(t)}{A} \delta(z) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w}{\phi} \bar{F}(\phi, k, z, t) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma(z) \frac{w^2}{\phi^2} \frac{\partial D(\phi)}{\partial z} \right) + \frac{Q_f(t) w_f(t)}{A} \delta(z). \quad (5.10)$$

O modelo é, então, sinteticamente expressado por (5.9) e (5.10).

5.1.3 Propriedades da alimentação e a floculação

A propriedade descrita por k indica o estado da floculação de cada partícula na entrada do espessador, por meio da alteração da velocidade de sedimentação v_{hs} , definida em (5.5). No entanto, essa propriedade k precisa ter uma relação com a concentração de floculante adicionada à suspensão, ou a massa de floculante adicionada por massa de suspensão.

Ao considerar que c representa essa concentração de floculante e referindo-se à Figura 4.1 para pontuar-se que existem doses ótimas de floculantes devido à reestabilização das partículas por excesso de floculante, pode-se observar que a velocidade de sedimentação das partículas (velocidade de Stokes) acompanha o comportamento mostrado na Figura 5.3.

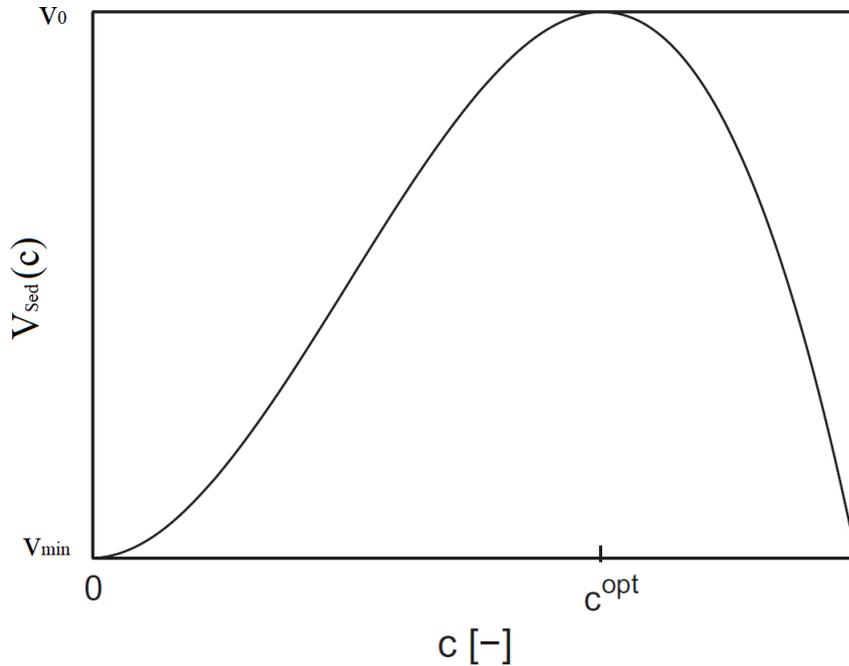


Figura 5.3: Curva típica da relação entre a velocidade de Stokes e a concentração de floculante: $v_{Sed} = v_{Sed}(c)$. A velocidade máxima é $v_{Sed}(c^{opt}) = v_0$.

Fonte: Adaptado de Betancourt *et al.* (2014).

A função $v_{Sed}(c)$ cresce no intervalo $[0, c^{opt}]$ e decresce para $c > c_{opt}$. Esse segundo intervalo pode ser desconsiderado para efeitos matemáticos, uma vez que tal região significa

desperdício de floculante. Portanto, pode-se escrever

$$\bar{k}(c) = \frac{v_{Sed}(c)}{v_0},$$

com $0 \leq c \leq c^{opt}$.

Finalmente, denomina-se $\dot{m}_{fl}(t)$ como sendo a massa de floculante por unidade de tempo adicionada no poço de alimentação do espessador. Então, a concentração de floculante pode ser expressa por

$$c(t) = \frac{\dot{m}_{fl}(t)}{\rho_s \phi_f(t) Q_f(t)},$$

e a função de alimentação da propriedade k pode ser definida como

$$k_f(t) = \bar{k}(c(t)).$$

Esse desenvolvimento permite estabelecer uma conexão entre a massa de floculante adicionada e as EDP (5.7) e (5.8), desenvolvidas previamente.

5.1.4 Soluções em regime permanente

Para desenvolvimento de soluções em regime permanente, considera-se que todas as funções e variáveis em (5.7) e (5.8) são independentes do tempo. Considera-se também que $\phi_e = 0$ e o espessador opera apenas no modo de operação ideal e, portanto, a interface de sedimentos está localizada na zona de espessamento.

No entanto, existem soluções em regime permanente $\phi = \phi(z)$ em que há sólidos na zona de clarificação e, portanto, a concentração do *overflow* ϕ_e deve ser positiva. Assim, o nível de sedimentos, ou seja, a posição da interface z_c em que $\phi(z_c) = \phi_c$ é localizada na zona de clarificação, tendo-se o modo de operação de alta capacidade (BÜRGER e NARVÁEZ, 2007).

Como considera-se a concentração de sólidos no *overflow* nulo, tem-se que o fluxo de alimentação (por unidade de área) $Q_f \phi_f / A$ é igual ao fluxo na zona de espessamento. Assim, (5.7) e (5.8) são reduzidas às quatro igualdades seguintes para as variáveis desconhecidas $\phi(z)$, $k(z)$, ϕ_u e k_u :

$$\frac{Q_f \phi_f}{A} = F(\phi, k) - k \frac{dD(\phi)}{dz} = \frac{Q_u \phi_u}{A} \quad (5.11)$$

$$\frac{Q_f k_f \phi_f}{A} = k F(\phi, k) - k^2 \frac{dD(\phi)}{dz} = \frac{Q_u k_u \phi_u}{A}. \quad (5.12)$$

Primeiramente, é pertinente assumir que $Q_f \phi_f > 0$. Assim, pode-se realizar o seguinte procedimento: multiplica-se a (5.11) por k e, em seguida, subtrai-se (5.12), obtendo-se

$$k(z) - k_f = 0 = k(z) - k_u,$$

e, portanto, $k_f = k = k_u = \text{constante}$.

Dessa forma, pode-se determinar $\phi(z)$ a partir da igualdade à esquerda de (5.11) (BETANCOURT *et al.*, 2014). Finalmente, tem-se que a concentração $\phi(z)$ é uma função não decrescente para o intervalo $0 < z < B$, podendo ter, no máximo, uma descontinuidade nessa região. Então, (5.11) reduz-se à equação diferencial ordinária (EDO)

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{kd(\phi)} \left(F(\phi, k) - \frac{Q_f \phi_f}{A} \right), \quad (5.13)$$

desde que $\phi > \phi_c$. A condição de contorno para a integração dessa equação é dada por

$$\phi(B^-) = \phi_u = \frac{Q_f \phi_f}{Q_u}.$$

Em $z = z_c$, existe uma descontinuidade, em que a solução é constante e igual a ϕ_1 , também chamada de concentração conjugada. Tal concentração satisfaz à seguinte equação

$$F(\phi_1, k) = \frac{Q_f \phi_f}{A}.$$

5.1.5 Procedimento numérico para simulação

Em Betancourt *et al.* (2014) ainda é apresentado um esquema numérico para a simulação de espessadores considerando a adição de floculantes. Antes de descrever o procedimento, define-se

$$q(z, t) := \begin{cases} -Q_e(t)/A, & \text{para } z < 0, \\ Q_u(t)/A, & \text{para } z > 0, \end{cases}$$

com $q(z, t)$ sendo a função de velocidade das massas. Reescreve-se também a função

$$D_1(\phi) := \int_0^\phi \frac{d(s)}{s} ds.$$

Dessa forma, pode-se reescrever a seguinte parcela que aparece no lado direito das EDP (5.7) e (5.8) como

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial D(\phi)}{\partial z} = \frac{1}{\phi} d(\phi) \phi_z = \frac{\partial D_1(\phi)}{\partial z}.$$

O termo da alimentação pode ser incorporado no fluxo convectivo, pontuando-se que $\delta(z)$ em (5.9) e (5.10) é a derivada da função de Heaviside $\mathcal{H}(z)$, ou seja $\delta(z) = \mathcal{H}'(z)$. Tem-se, portanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (q(z, t)(\phi - \phi_f) + \gamma(z)k(\phi, w)v_{hs}(\phi)\phi) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma(z)w \frac{\partial D_1(\phi)}{\partial z} \right) \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (q(z, t)(w - w_f) + \gamma(z)k(\phi, w)v_{hs}(\phi)w) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma(z)wk(w, \phi) \frac{\partial D_1(\phi)}{\partial z} \right), \quad (5.15)$$

tratando-se k como uma função de ϕ e w , tem-se

$$k(w, \phi) := \begin{cases} 0, & \text{se } \phi = 0, \\ w/\phi, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para fins numéricos, Betancourt *et al.* (2014) escolhe o valor de $k = 0$, em regiões onde $\phi = 0$, argumentando que não há partículas que possam carregar qualquer informação da propriedade k . Portanto, o valor de k é irrelevante nessas regiões.

Subdivide-se o eixo espacial em células de profundidade $\Delta z > 0$, como ilustrado na Figura 5.4, além de definir-se os pontos discretos $z_j := j\Delta z$ e os pontos discretos intermediários $z_{j+1/2} := (j + 1/2)\Delta z$ para $j = 0, \pm 1, \dots$. Analogamente, o eixo do tempo é discretizado nos pontos $t_n := n\Delta t$ para $n = 0, 1, \dots$ com passos temporais de $\Delta t > 0$. Betancourt *et al.* (2014) define também $\lambda := \Delta t/\Delta z$ e $\mu := \lambda/\Delta z$.

Os pontos intermediários de q e γ são computados fazendo-se a média das células, dadas por

$$q_{j+1/2}^n := \frac{1}{\Delta z} \int_{z_j}^{z_{j+1}} q(z, t_n) dz = q(z_{j+1/2}, t_n),$$

$$\gamma_{j+1/2}^n := \frac{1}{\Delta z} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \gamma(z) dz.$$

O esquema numérico divide as contribuições lineares e não lineares para os fluxos, considerando-as separadamente. Tem-se, assim, dois passos de tempo Eulerianos, um para a parcela linear e o outro para a contribuição não linear. O primeiro passo do esquema é realizado usando-se a notação $\mathbf{u}_j^n := (\phi_j^n, w_j^n)$, $\mathbf{u}_f^n := (\phi_f^n, w_f^n)$. Com isso, tem-se

$$\mathbf{u}_j^{n+1/2} = \mathbf{u}_j^n - \lambda (q_{j+1/2}^n (\mathbf{u}_{j+1/2}^n - \mathbf{u}_f^n) - q_{j-1/2}^n (\mathbf{u}_{j-1/2}^n - \mathbf{u}_f^n)),$$

em que

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^n := \begin{cases} \mathbf{u}_j^n, & \text{se } q_{j+1/2}^n \geq 0, \\ \mathbf{u}_{j+1}^n, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.16)$$

Assim, usa-se $\mathbf{u}_{j+1/2}^n$ para computar

$$k_j^{n+1/2} := \begin{cases} 0 & \text{se } \phi_j^{n+1/2} = 0, \\ w_j^{n+1/2} / \phi_j^{n+1/2}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2} := \gamma_{j+1/2} k_{j+1}^{n+1/2} \mathbf{v}_{hs}(\phi_{j+1}^{n+1/2}), \quad (5.18)$$

$$k_{j+1/2}^{n+1/2} := \begin{cases} k_j^{n+1/2} & \text{se } \phi_{j+1}^{n+1/2} \leq \phi_j^{n+1/2}, \\ k_{j+1}^{n+1/2}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.19)$$

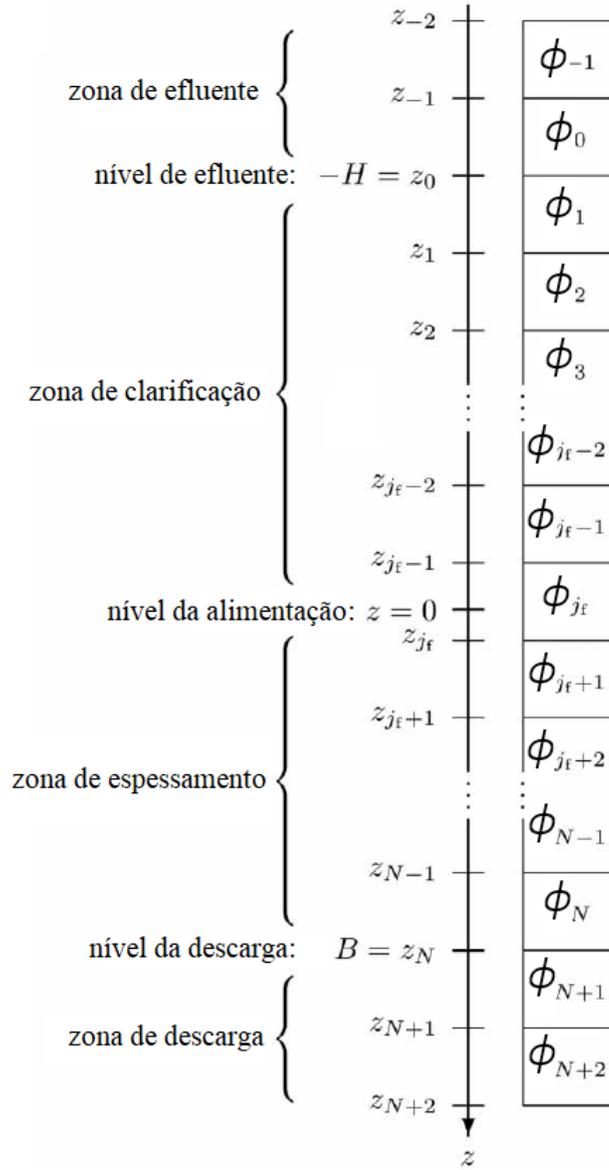


Figura 5.4: Subdivisão do eixo z para propósitos numéricos.
Fonte: Adaptado de Bürger *et al.* (2013).

$$w_{j+1/2}^{n+1/2} := \begin{cases} w_j^{n+1/2} & \text{se } \phi_{j+1}^{n+1/2} \leq \phi_j^{n+1/2}, \\ w_{j+1}^{n+1/2}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.20)$$

Finalmente, o segundo passo do esquema é

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} = & \phi_j^{n+1/2} - \lambda \left(v_{j+1/2}^{n+1/2} \phi_j^{n+1/2} - v_{j-1/2}^{n+1/2} \phi_{j-1}^{n+1/2} \right) \\ & + \mu \left(\gamma_{j+1/2} w_{j+1/2}^{n+1/2} \left[D_1 \left(\phi_{j+1}^{n+1/2} \right) - D_1 \left(\phi_j^{n+1/2} \right) \right] \right. \\ & \left. - \gamma_{j-1/2} w_{j-1/2}^{n+1/2} \left[D_1 \left(\phi_j^{n+1/2} \right) - D_1 \left(\phi_{j-1}^{n+1/2} \right) \right] \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_j^{n+1} = w_j^{n+1/2} - \lambda \left(v_{j+1/2}^{n+1/2} w_j^{n+1/2} - v_{j-1/2}^{n+1/2} w_{j-1}^{n+1/2} \right) \\
+ \mu \left(\gamma_{j+1/2} w_{j+1/2}^{n+1/2} k_{j+1/2}^{n+1/2} \left[D_1 \left(\phi_{j+1}^{n+1/2} \right) - D_1 \left(\phi_j^{n+1/2} \right) \right] \right. \\
\left. - \gamma_{j-1/2} w_{j-1/2}^{n+1/2} k_{j-1/2}^{n+1/2} \left[D_1 \left(\phi_j^{n+1/2} \right) - D_1 \left(\phi_{j-1}^{n+1/2} \right) \right] \right).
\end{aligned}$$

5.1.6 Condição de estabilidade do método numérico

Garante-se a estabilidade das soluções obtidas pelo método numérico apresentado por meio da condição CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). A condição CFL garante que $0 \leq w_j^n \leq \phi_j^n \leq 1$ para todo j e todo $n > 0$ se os dados iniciais e os dados de entrada na alimentação satisfazem seus correspondentes limites (BETANCOURT *et al.*, 2014). A condição CFL postula que

$$\max\{C_1, C_2, C_3\} \leq 1$$

em que

$$\begin{aligned}
C_1 &= \lambda \max_{0 \leq t \leq T} \frac{Q_f(t)}{A}, \\
C_2 &= \lambda \left(\max_{0 \leq \phi \leq 1} v_{hs}(\phi) + \max_{0 \leq \phi \leq 1} \dot{v}_{hs}(\phi) \right) + 2\mu \max_{\phi_c \leq \phi \leq 1} \frac{d(\phi)}{\phi}, \\
C_3 &= \lambda \max_{0 \leq \phi \leq 1} v_{hs}(\phi) + 2\frac{\mu}{\phi_c} \max_{\phi_c \leq \phi \leq 1} \frac{d(\phi)}{\phi},
\end{aligned}$$

e T é o tempo total de simulação.

5.2 Simulações e Resultados

O modelo de espessador abordado na seção é simulado e os resultados são apresentados em duas partes. Primeiramente, verifica-se o bom funcionamento do procedimento numérico utilizando-se exemplos apresentados em Betancourt *et al.* (2014). Em seguida, o modelo de espessador cilíndrico é validado, excitando-se o sistema com dados coletados em um espessador presente em planta da Vale S.A. em Carajás - PA.

5.2.1 Testes Ilustrativos

Com o intuito de ilustrar a conexão entre a propriedade k , a concentração de sólidos ϕ_u e o nível da interface z_c , Betancourt *et al.* (2014) descreve um espessador com as seguintes dimensões:

- Diâmetro = 60 m;

- Profundidade do poço de alimentação $H = 0,8$ m;
- Profundidade do *underflow* $B = 3,2$ m;
- Altura total = $H + B = 4$ m.

Além disso, Betancourt *et al.* (2014) define, para experimentos de rejeitos mineirais de cobre, as funções

$$v_{hs}(\phi) = \begin{cases} 6,05 \cdot 10^{-4} (1 - \phi)^{12,59} \text{ ms}^{-1}, & \text{para } 0 \leq \phi \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\sigma_e(\phi) = \begin{cases} 0, & \text{para } \phi \leq 0,23, \\ 5,35e^{17,9\phi} \text{ Pa}, & \text{para } \phi > 0,23. \end{cases}$$

As densidades dos sólidos e do líquido são $\rho_s = 2650 \text{ kgm}^{-3}$ e $\rho_f = 1000 \text{ kgm}^{-3}$, respectivamente. Assume-se que a velocidade máxima v_0 corresponde à velocidade de sedimentação v_{sed} determinada por Becker (1982). São com esses dados e com os exemplos apresentados em Betancourt *et al.* (2014) que simula-se o funcionamento do modelo apresentado.

O primeiro exemplo apresentado em Betancourt *et al.* (2014) é dividido em três cenários distintos. Em todos eles, inicia-se a simulação dinâmica com um perfil em regime permanente com $k_f = 0,5061$, $\phi_f = 0,15$, $Q_f = 400 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ e

$$Q_u = \frac{60}{0,32} \text{ m}^3 \text{ h}^{-1} = 187,5 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}.$$

Portanto, tem-se que $Q_f \phi_f = 60 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ e $\phi_u = 0,32$. A Figura 5.5 apresenta o gráfico com o perfil de concentração de sólidos ao longo do espessador, em regime permanente. Esse perfil é utilizado como dado inicial para a simulação dinâmica.

5.2.1.1 Cenário 1

No primeiro cenário, realiza-se um incremento em $Q_f \phi_f$ de $60 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ para $90 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ no instante de tempo $t = 20$ horas. Para isso, aumenta-se a concentração ϕ_f de $0,15$ para $0,225$ e mantém-se a vazão Q_f constante. Nesse cenário, não altera-se o valor de k_f e de Q_u .

Tem-se em regime que a altura da interface $z_c = 2,65$ m e a concentração $\phi_u = 0,32$. Com essa alteração, sabe-se que a massa de sólidos no tanque tende a aumentar, pois nenhuma ação é tomada em relação à vazão do *underflow* Q_u . Dessa forma, o nível da interface sobe até alcançar a zona de clarificação, acima do poço de alimentação. Como resultado, ocorre o chamado *overflow*, quando há alta concentração de sólidos no espessador.

A Figura 5.6 exibe a concentração volumétrica no *underflow* para cada cenário do exemplo, ao passo que o perfil de concentração em todo o espessador ao longo do tempo é apresentado na Figura 5.8.

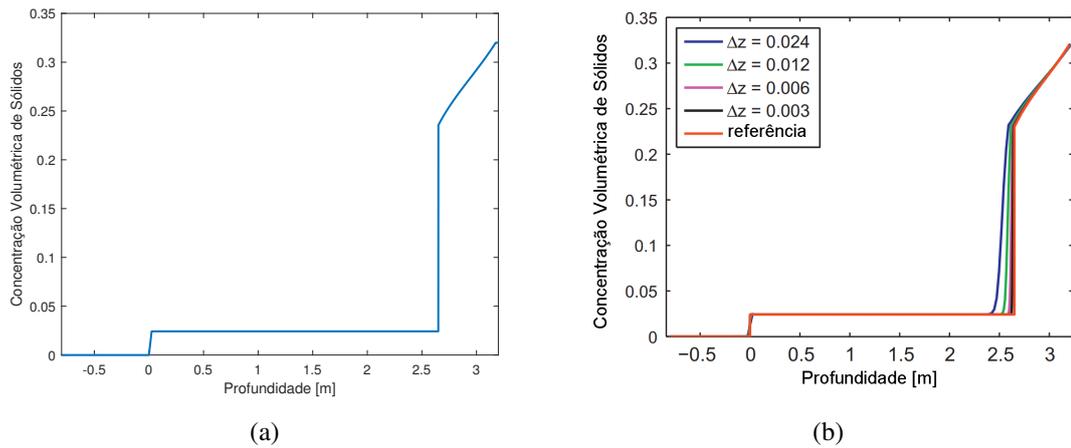


Figura 5.5: Perfil inicial de concentração no espessador para o exemplo em que (a) é o perfil simulado para $\Delta z = 0,025$ m e (b) é a curva apresentada em Betancourt *et al.* (2014) para diferentes valores de Δz .

Fonte: Betancourt *et al.* (2014).

Além disso, é possível observar a variação da altura da interface para os três cenários na Figura 5.7. Nota-se que, com o aumento na concentração de sólidos na alimentação, a altura da interface movimenta-se em direção ao transbordo.

5.2.1.2 Cenário 2

A mesma variação na alimentação realizada em $t = 20$ h, no cenário anterior é repetida nesse cenário. A diferença está no fato de alterar-se a vazão do *underflow* de $187,5 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ para $281,25 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ também em $t = 20$ horas. Como na simulação anterior, nenhuma alteração é imposta a k_f .

Com a ação de aumentar-se Q_u (Figura 5.9), evita-se o excesso de partículas sólidas no *overflow*, como ocorrido no cenário 1.

5.2.1.3 Cenário 3

A perturbação na alimentação, realizada nos cenários anteriores, faz com que os valores de ϕ_u e z_c mudem. Para mantê-los nos mesmos valores anteriores à perturbação, altera-se em $t = 20$ h o valor de Q_u como no cenário 2 e, no mesmo instante, faz-se $k_f = 0,7592$.

O valor de k_f ao longo do tempo é apresentado na Figura 5.10a, além de se mostrar o perfil da propriedade k em todo o espessador para cada instante de tempo simulado.

5.2.2 Validação do Modelo

Valida-se o modelo desenvolvido por meio de sua configuração de modo a representar a operação de um espessador existente em planta da Vale. S.A. em Carajás - PA. Deve-se ressaltar que nesse cenário há limitações dos dados coletados, uma vez que o modelo demanda

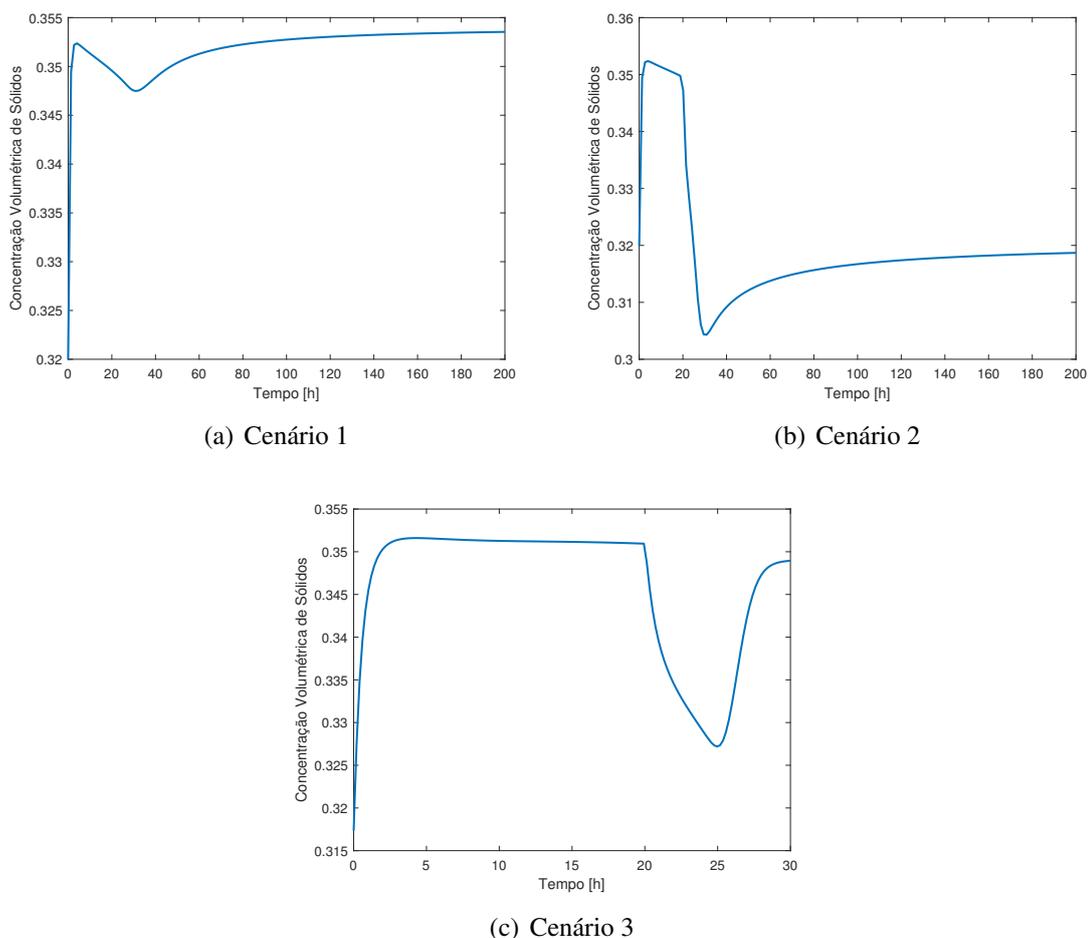


Figura 5.6: Comportamento da concentração no *underflow* ao longo do tempo para cada cenário do exemplo.

Fonte: O autor.

algumas informações que gerariam um custo extra ao processo, tanto do ponto de vista financeiro (aquisição de novos instrumentos) quanto de tempo.

Obteve-se o histórico de medição dos doze meses do ano de 2019 para um espessador de rejeitos de minério de ferro. A Tabela 5.1 apresenta uma relação de dados solicitados e quais deles foram obtidos. Com relação aos dados faltantes, algumas aproximações são feitas. As características da alimentação, muito importantes para o modelo, são consideradas constantes e com vazão igual a 800 ton/h e densidade da polpa de $1,64 \text{ g/cm}^3$ para todo o período de leitura. Esses valores fixos de vazão e densidade são obtidos de testes de sedimentação realizados e fornecidos para o desenvolvimento do presente trabalho. Observa-se que considerar a alimentação constante pode não representar fielmente o que se vê na planta. No entanto, observando o processo de tratamento mineral como um todo é esperada uma certa homogeneidade do material processado.

Além disso, observa-se a necessidade de se trabalhar com densidade da polpa, ao invés de concentração volumétrica de sólidos. O instrumento utilizado para a medição é o densímetro,

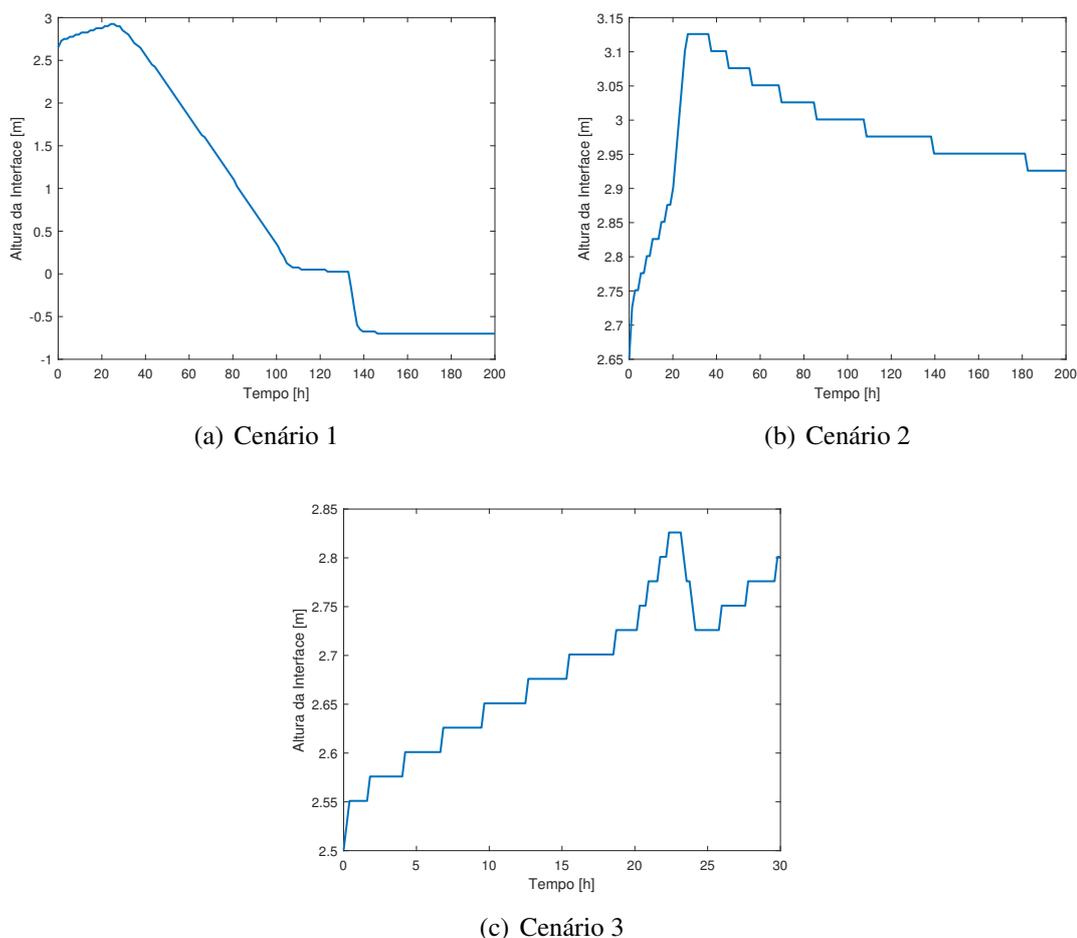


Figura 5.7: Altura da interface ao longo do tempo para cada cenário do exemplo.

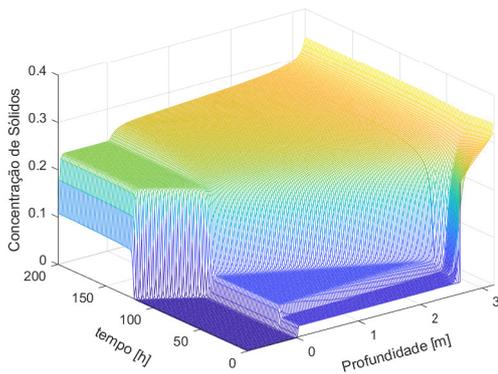
Fonte: O autor.

portanto é mais conveniente trabalhar diretamente com a densidade. Um algoritmo simples é desenvolvido para que essa conversão de unidade seja realizada.

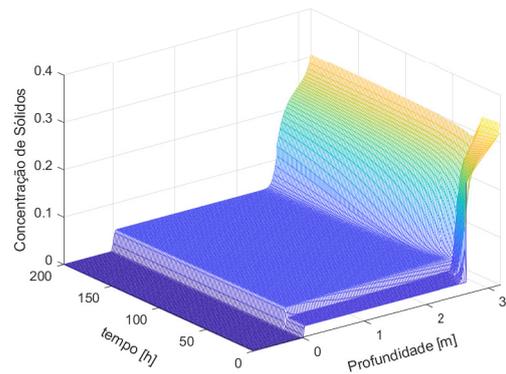
Outros dados requisitados que não foram obtidos são as características do *overflow*. Esses dados não são medidos, mas podem ser estimados pelo balanço de massas do equipamento operando em regime permanente. Uma vez conhecidas as densidades e as vazões volumétricas da alimentação e do *underflow*, tem-se que a vazão do *overflow* é $Q_e = Q_f - Q_u$ e $Q_f \phi_f = Q_u \phi_u + Q_e \phi_e$.

Quanto às dimensões do espessador, apesar dos parâmetros altura da região cônica e inclinação do fundo terem sido requisitados e obtidos, esses serão utilizados apenas em capítulos subsequentes do trabalho. No momento, considera-se o espessador sendo um tanque cilíndrico, cuja altura é a soma das alturas das regiões cônica e cilíndrica. É importante frisar que essa consideração faz com que a capacidade volumétrica do espessador do modelo é consideravelmente maior que a capacidade real.

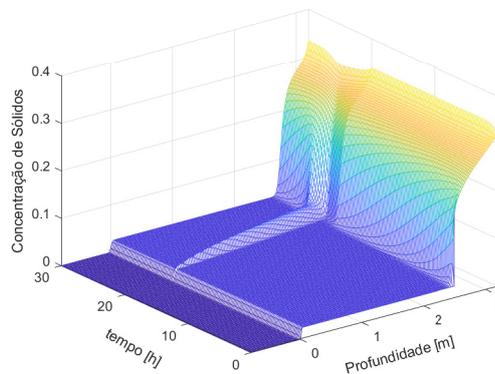
A dosagem de floculante adicionada é fornecida em g/ton e é constante para todo o intervalo de tempo mensurado. O fato desse parâmetro ser constante afeta a validação do modelo,



(a) Cenário 1



(b) Cenário 2



(c) Cenário 3

Figura 5.8: Gráficos tridimensionais para a concentração de sólidos no espessador ao longo do tempo para cada cenário do exemplo.

Fonte: O autor.

uma vez que torna-se impossível compreender o efeito da variação de floculante na altura da interface. Como a dosagem de floculante e a velocidade de sedimentação estão relacionados como mostrado na Figura 5.3, pode-se tirar proveito dos testes de sedimentação realizados para estimar as velocidades de sedimentação mínima e máxima. Esses experimentos foram realizados variando-se a dosagem de floculante de 0 a 20 g/ton , como mostrado na Tabela 5.2. Como houve a repetição do ensaio para cada dosagem de floculante, exibe-se no gráfico da Figura 5.11 a velocidade média de sedimentação para esses ensaios, que deveria (em tese) apresentar um comportamento análogo ao apresentado no gráfico da Figura 5.3.

Além disso, as medições de altura da interface são feitas com tubos de tamanhos variados que são imersos no espessador de modo que uma amostra seja retirada e então afere-se a olho nu a turbidez da água. Da forma que são feitas, essas medições podem ser imprecisas e inexatas. O ideal seria investir e aplicar instrumentação adequada para maior confiabilidade nos dados. Vale lembrar que a referência para a medição passa a ser o ponto de transbordo, diferentemente da abordagem do modelo de Betancourt *et al.* (2014) que tem o ponto de altura igual a 0 m na

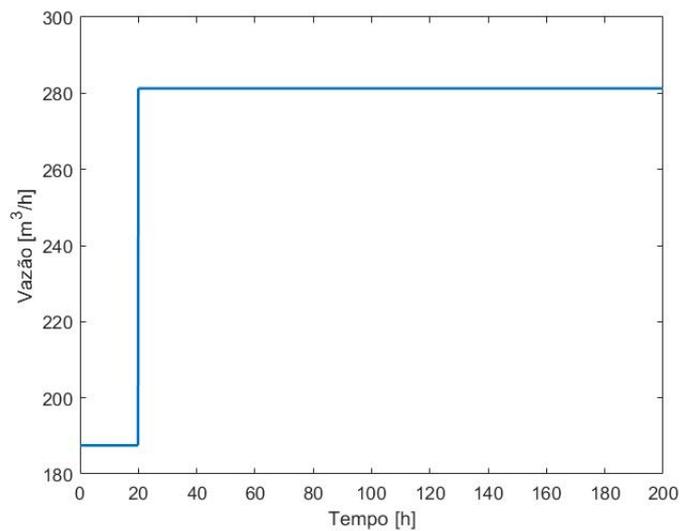


Figura 5.9: Curva para vazão no espessador ao longo do tempo para os cenários 2 e 3. O gráfico para o primeiro cenário é omitido pelo fato das variáveis serem constantes.

Fonte: O autor.

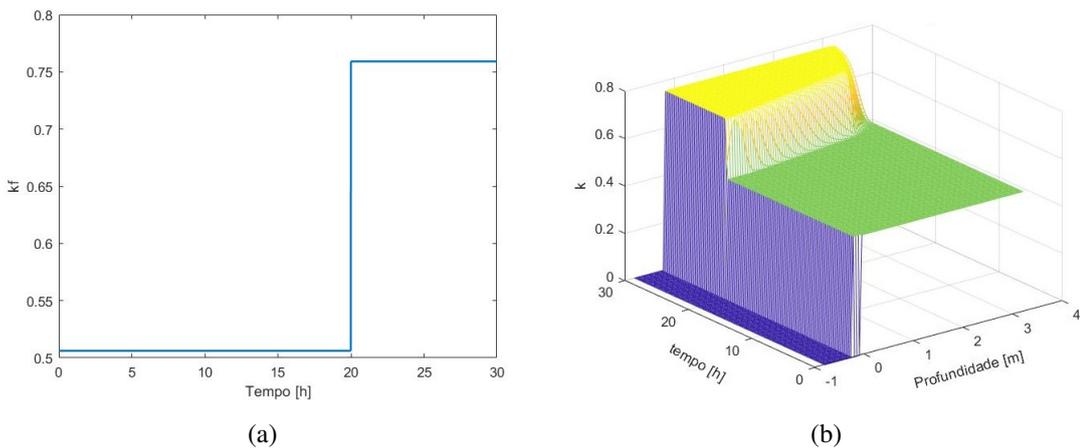


Figura 5.10: Curvas para (a) valor de k_f ao longo do tempo e para (b) o perfil de k no cenário 3.

Fonte: O autor.

posição do *feedwell*.

Outro detalhe prático que requer atenção é o fato de a altura da interface medida *in loco* se tratar do ponto de transição entre a região clarificada e a região de sedimentação. Betancourt *et al.* (2014) considera como altura da interface o ponto de transição entre a região de sedimentação e a região de compactação (espessado). Refere-se à Figura 5.1 para melhor compreensão.

5.2.2.1 Ajuste de Parâmetros do Modelo

Betancourt *et al.* (2014) apresenta resultados ilustrativos com aproximações de alguns dos parâmetros do modelo aproximados para uma mina de cobre e para um espessador com dimensões específicas. Como trabalha-se com um espessador real neste trabalho, é esperado

Tabela 5.1: Relação dados solicitados e obtidos de planta da Vale S.A. em Carajás - PA.

Dado	Situação	Valor	
Dimensões do espessador	Altura da região cônica	Obtido	3,8 m
	Altura da região cilíndrica	Obtido	3,2 m
	Inclinação do fundo	Obtido	14°
	Altura do feedwell	Obtido	2,0 m
	Diâmetro	Obtido	35 m
Características da alimentação	Histórico de vazão	Não é medido	–
	Histórico de densidade	Não é medido	–
	Densidade do sólido	Obtido	4,7
Características da descarga	Histórico de vazão	Obtido	–
	Histórico de densidade	Obtido	–
Características do sobrenadante	Histórico de vazão	Não é medido	–
	Histórico de densidade	Não é medido	–
Floculante	Histórico de vazão/massa	Obtido	15 g/t
Altura da Interface	Histórico	Obtido	–

Fonte: O autor.

Tabela 5.2: Resultados dos ensaios de sedimentação realizados com amostras da alimentação do espessador de Carajás.

Teste	Floculante (g/ton)	Velocidade de Sedimentação (m/s)
1	0	$1,09 \times 10^{-4}$
2	0	$0,86 \times 10^{-4}$
3	2	$1,31 \times 10^{-4}$
4	2	$0,71 \times 10^{-4}$
5	5	$1,10 \times 10^{-4}$
6	5	$1,13 \times 10^{-4}$
7	10	$1,78 \times 10^{-4}$
8	10	$2,14 \times 10^{-4}$
9	15	$1,60 \times 10^{-4}$
10	15	$3,29 \times 10^{-4}$
11	20	$2,92 \times 10^{-4}$
12	20	$3,18 \times 10^{-4}$

Fonte: O autor.

que ajustes fossem feitos para que o modelo apresentasse certa fidelidade à dinâmica real do espessador de rejeitos presente em Carajás.

Assim, os parâmetros presentes em (5.2) e (5.4) são ajustados por tentativa e erro de modo que tenha-se

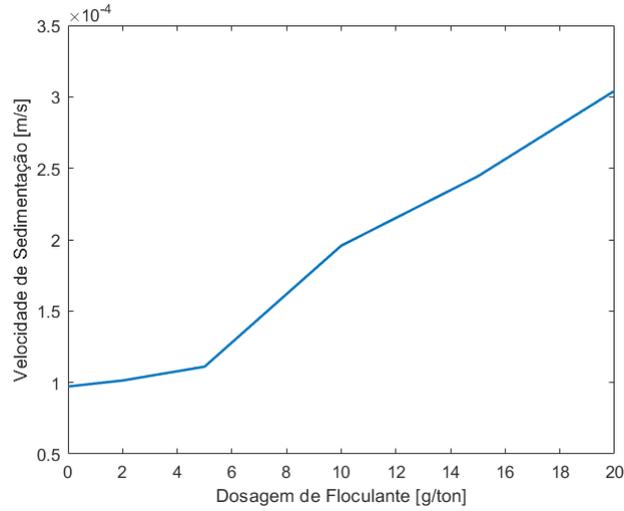


Figura 5.11: Curva relacional entre dosagem de flocculante e velocidade de sedimentação média para os testes realizados com amostras da alimentação do espessador de Carajás.

Fonte: O autor.

$$v_{hs}(\phi) = \begin{cases} 12,21 \cdot 10^{-4} (1 - \phi)^{12,62} \text{ ms}^{-1}, & \text{para } 0 \leq \phi \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$\sigma_e(\phi) = \begin{cases} 0, & \text{para } \phi \leq 0,23, \\ 5,35e^{16,78\phi} \text{ Pa}, & \text{para } \phi > 0,23. \end{cases}$$

As densidades do sólido e do líquido são $\rho_s = 4700 \text{ kgm}^{-3}$ e $\rho_f = 1000 \text{ kgm}^{-3}$, respectivamente.

5.2.2.2 Discussão dos Resultados

Nesta seção, apresentam-se os resultados para janelas de 24 horas de simulação, com um passo de profundidade $\Delta z = 0,08 \text{ m}$. O sistema é excitado com uma dosagem de flocculante constante e a vazão volumétrica do *underflow* é mostrada na Figura 5.12. Num primeiro momento inicia-se a simulação com um perfil de concentração idêntico ao mostrado na Figura 5.13, obtido por meio da integração de (5.13). Nota-se que é feita a exibição dos resultados em termos de densidade, ao invés de concentração volumétrica. A conversão é feita com o intuito de aproximar o presente trabalho à realidade experimentada nas plantas.

Destaca-se ainda a dificuldade de iniciar a simulação com um perfil de concentração de sólidos representativo do encontrado no espessador. Para isso, seria necessário obter a medição dessa variável em todo o espessador, algo considerado impraticável e custoso.

Feitas as devidas considerações, pode-se observar na Figura 5.14 sinais comparativos da densidade real medida no *underflow* e da densidade no *underflow* estimada pelo modelo. Visualmente pode-se notar que o modelo parece representar com certa fidelidade a densidade no *underflow* do espessador real.

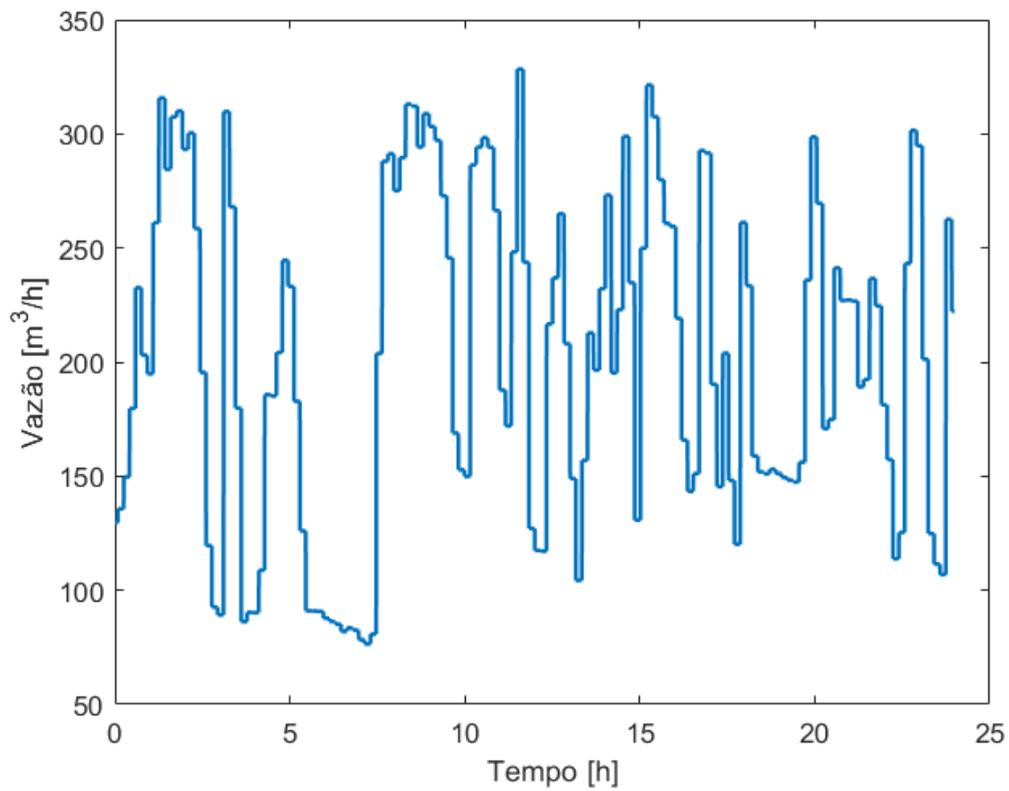


Figura 5.12: Sinal de Vazão Volumétrica aplicado no espessador de Carajás.
Fonte: O autor.

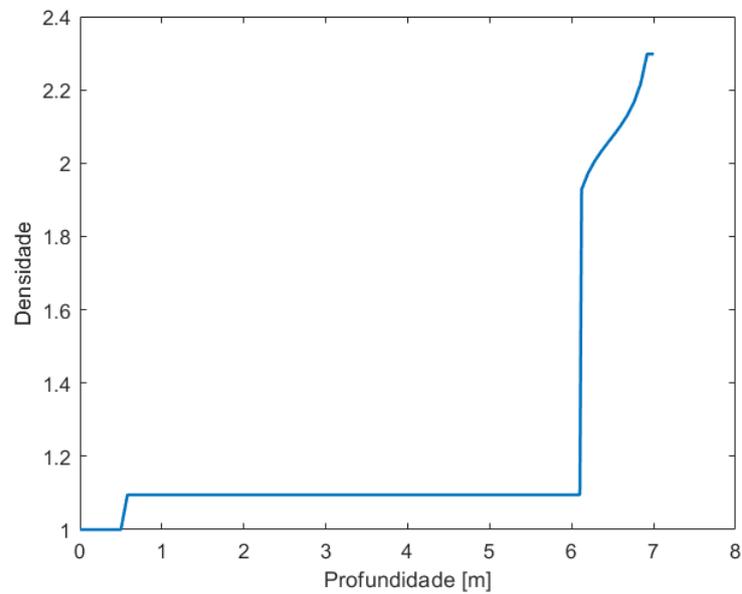


Figura 5.13: Perfil de densidade usado para iniciar a simulação do espessador de Carajás.
Fonte: O autor.

Com o intuito de mensurar a qualidade do modelo são utilizadas as métricas *Mean Squared Error* (MSE), *Root Mean Squared Error* (RMSE) e *Normalized Root Mean Squared*

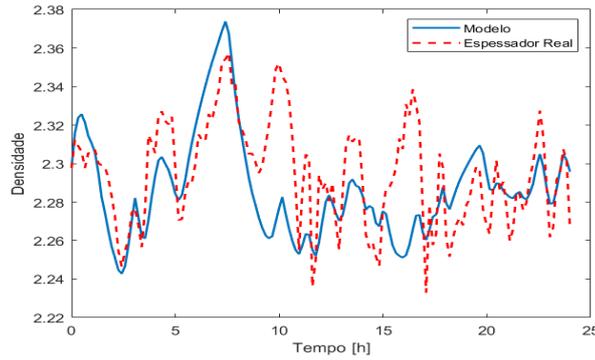


Figura 5.14: Sinais de densidade no *underflow* do espessador e do modelo ao longo do tempo.
Fonte: O autor.

Error (NRMSE). Se um sinal y com n elementos representar a saída real de um sistema e \bar{y} , também de tamanho n , for a saída de um modelo, o MSE é (WANG e BOVIK, 2009)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2.$$

O termo quadrático permite que valorize-se os erros grandes e reduza-se o efeito de pequenas diferenças, além de evitar a soma de erros com sinais opostos. O RMSE é a raiz quadrada do MSE e pode ser interpretado aqui como a medida do desvio médio entre o sinal real e o sinal de saída do modelo. Ainda, tem-se que o NRMSE é

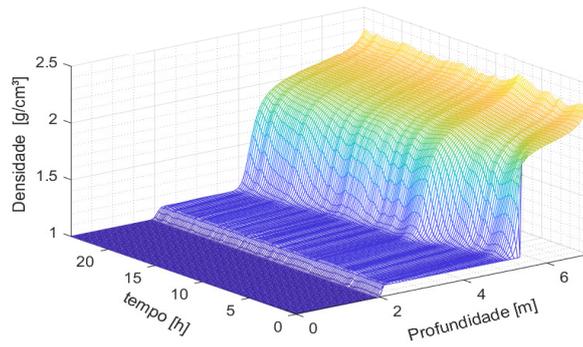
$$NRMSE = \frac{RMSE}{\bar{y}_{max} - \bar{y}_{min}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}}{\bar{y}_{max} - \bar{y}_{min}},$$

em que \bar{y}_{max} e \bar{y}_{min} são os valores máximos e mínimos do sinal \bar{y} , respectivamente. Com essa métrica é possível analisar o desempenho do modelo avaliando o percentual do desvio médio. Na Tabela 5.3 são apresentados os valores obtidos das métricas de avaliação escolhidas.

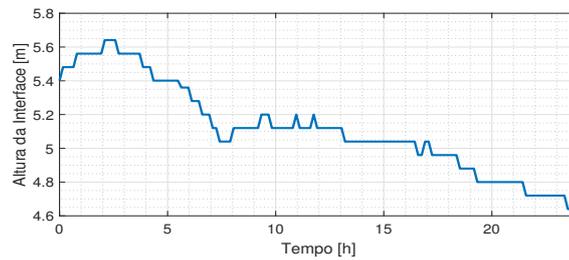
Na Figura 5.15 é possível visualizar o gráfico tridimensional da densidade e altura da interface no espessador ao longo das 24 horas de simulação.

Uma boa prática é verificar se o modelo ajustado também é representativo em caso de excitar-se o sistema com dados distintos. Escolhe-se, portanto outra janela de 24 horas presente na base de dados obtida. São exibidos na Figura 5.16 os sinais de vazão de *underflow* e as densidades no *underflow*. O MSE maior pode ser explicado pelo fato de o modelo ser iniciado em um ponto de operação distinto. A densidade no *underflow* inicial medida é aproximadamente 2,28, enquanto o modelo é iniciado com uma densidade igual a 2,3. Outra explicação pode estar no fato de que as características da alimentação podem ter mudado. Os dois intervalos são retirados de meses distintos.

Por fim, pode-se verificar a convergência do modelo, iniciando-se a simulação considerando o espessador cheio apenas com água (densidade unitária). O comportamento da



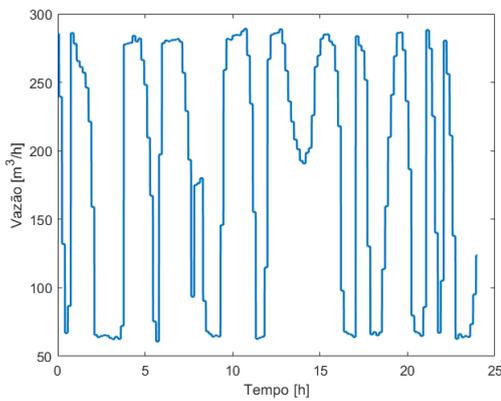
(a)



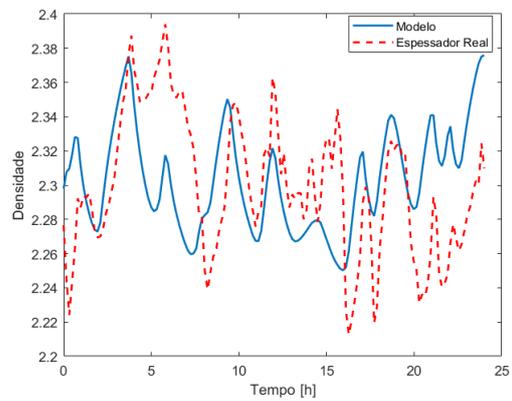
(b)

Figura 5.15: (a) Perfil de densidade no espessador e (b) sinal de altura da interface para a janela de tempo 1.

Fonte: O autor.



(a)



(b)

Figura 5.16: (a) Sinal de vazão no *underflow* e (b) densidade no *underflow* para um segundo intervalo de tempo.

Fonte: O autor.

densidade no *underflow* pode ser observado na Figura 5.17 para os dois intervalos de observação apresentados.

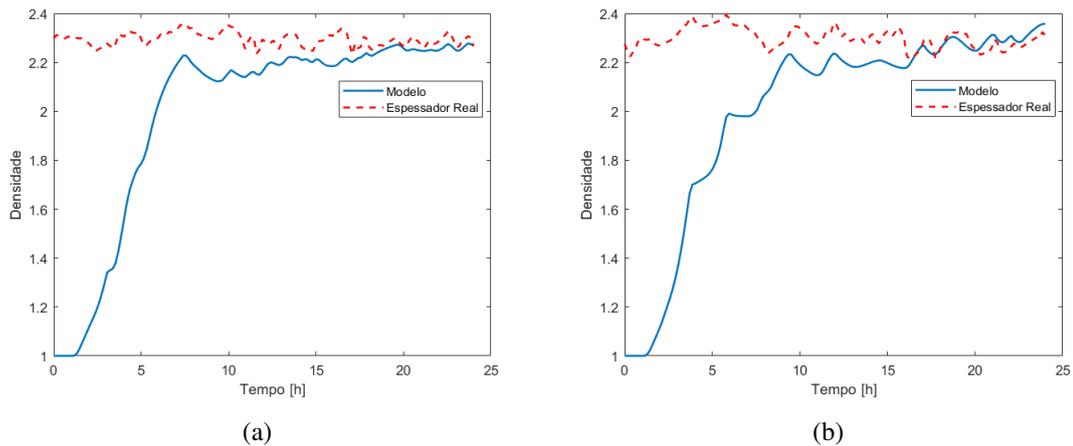


Figura 5.17: Sinais de densidade no *underflow* e do modelo ao longo do tempo com espessador inicialmente sem massa sólida na simulação.

Fonte: O autor.

Tabela 5.3: Métricas de avaliação da validação do modelo de Betancourt *et al.* (2014).

	<i>MSE</i>	<i>RMSE</i>	<i>NRMSE</i>
Intervalo 1	$6,48 \times 10^{-4}$	0,0255	0,2044
Intervalo 2	20×10^{-4}	0,045	0,248

Fonte: O autor.

5.3 Conclusão

Nesse capítulo, descreveu-se o modelo de espessador convencional de Betancourt *et al.* (2014), apresentando-se de maneira detalhada o desenvolvimento matemático necessário para a simulação do modelo. Replicam-se os exemplos ilustrativos de Betancourt *et al.* (2014), além de validar-se o modelo com dados de um espessador de minério de ferro da Vale S.A., em Carajás - PA. O modelo possui, como principal vantagem, a possibilidade de considerar o efeito da adição de floculante, além de ter sido capaz de seguir o comportamento dinâmico do espessador da Vale S.A. estudado.

6 Modelo de Espessador com Área da Seção Transversal Variável

Visando aprimorar o modelo de espessadores desenvolvido em Bürger *et al.* (2011, 2013), mas sem dar um passo maior e estabelecer um modelo bi ou tridimensional, como em Samstag *et al.* (2016), Bürger *et al.* (2017) decide incluir a área da seção transversal variável no modelo unidimensional.

6.1 Desenvolvimento Matemático

O modelo pode ser escrito pela EDP

$$\frac{\partial(A(z)\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}F(\phi, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \left(A(z) [\gamma(z)d_{comp}(\phi) + d_{disp}(z, Q_f(t))] \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q_f(t)\phi_f(t)\delta(z), \quad (6.1)$$

que difere da EDP descrita em (5.1), do modelo de Betancourt *et al.* (2014), na dependência da área da seção transversal da profundidade z , denotada por $A(z)$. Ainda, descreve-se a dispersão das partículas sólidas próximas à alimentação pela função $d_{disp}(z, Q(f))$. Essa função simula o fenômeno de mistura que ocorre no poço de alimentação dos espessadores e ocorre apenas dentro do espessador, conforme a expressão

$$d_{disp}(z, Q_f(t)) \begin{cases} = 0, & \text{se } z \leq -H \text{ e } z \geq B, \\ \geq 0, & \text{se } -H \leq z \leq B. \end{cases}$$

Bürger *et al.* (2013) define, por meio de experimentos, a função de dispersão como

$$d_{disp}(z, Q_f) = \begin{cases} \alpha_1 Q_f \exp\left(\frac{-z^2/(\alpha_2 Q_f)^2}{1-|z|/(\alpha_2 Q_f)}\right), & \text{se } |z| < \alpha_2 Q_f, \\ 0, & \text{se } |z| \geq \alpha_2 Q_f, \end{cases}$$

em que $\alpha_1 = 0,001 \text{ m}$ e $\alpha_2 = 7,2 \text{ s/m}^2$ para os cenários apresentados na sequência. A função de compressibilidade é dada por

$$d_{comp}(\phi) = \frac{\rho_s}{(\rho_s - \rho_f)g} v_{hs}(\phi) \sigma'_e(\phi).$$

Ainda, a função $F(\phi, z, t)$, para este modelo, é definida por

$$F(\phi, z, t) = \begin{cases} -Q_e(t)\phi, & \text{para } z < -H \\ -Q_e(t)\phi + A(z)v_{hs}(\phi)\phi, & \text{para } -H \leq z < 0 \\ Q_u(t)\phi + A(z)v_{hs}(\phi)\phi, & \text{para } 0 < z \leq B \\ Q_u(t)\phi, & \text{para } z > B, \end{cases}$$

com

$$v_{hs}(\phi) = \frac{v_0}{1 + (\phi/\bar{\phi})^q},$$

em que $v_0 = 0,003 \text{ m/s}$, $\bar{\phi} = 3,87 \text{ kg/m}^3$ e $q = 3,58$. Por fim, nesse modelo, tem-se que

$$\sigma_e = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq \phi < \phi_c \\ \alpha(\phi - \phi_c), & \text{para } \phi \geq \phi_c, \end{cases}$$

com a concentração crítica $\phi_c = 8 \text{ kg/m}^3$ e $\alpha = 0,5 \text{ m}^2/\text{s}^2$ (BÜRGER *et al.*, 2017).

6.2 Procedimento numérico para simulação

O método numérico desenvolvido em Bürger *et al.* (2017) é derivado do procedimento apresentado em Bürger *et al.* (2013), considerando, contudo, a dependência da área da seção transversal A em relação à profundidade z .

Inicia-se a descrição do método, lembrando que a função de compressibilidade pode ser escrita na sua forma integral, conforme apresentado em (5.6). Assim, os fluxos de compressão e dispersão são

$$J_{comp}(z, t) := \gamma(z)d_{comp}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial z} = \gamma(z) \frac{\partial D(\phi)}{\partial z},$$

$$J_{disp}(z, t) := d_{disp}(z, Q_f(\phi)) \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Esses dois fluxos são aproximados por

$$J_{comp,j}^{num}(z, t) := \gamma(z_j) \frac{D_{j+1}^{num} - D_j^{num}}{\Delta z},$$

e

$$J_{disp,j}^{num}(z, t) := d_{disp,j} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta z}.$$

O fluxo F em $z = z_j$ entre as camadas j e $j + 1$ pode ser escrito como

$$F_j^{num} = \begin{cases} -Q_e(t)\phi(j+1), & \text{para } j = -2, -1, \\ -Q_e(t)\phi(j+1) + A(z_j)G_j, & \text{para } j = 0, \dots, j_f - 1, \\ Q_u(t)\phi(j) + A(z_j)G_j, & \text{para } j = j_f, \dots, N, \\ Q_u(t)\phi(j), & \text{para } j = N + 1, N + 2, \end{cases}$$

cujo fluxo numérico de Godunov é definido por

$$G_j = \begin{cases} \min_{\phi_j \leq \phi \leq \phi_{j+1}} v_{hs}(\phi)\phi, & \text{para } \phi \leq \phi_{j+1}, \\ \max_{\phi_j \geq \phi \geq \phi_{j+1}} v_{hs}(\phi)\phi, & \text{para } \phi > \phi_{j+1}. \end{cases}$$

O algoritmo para computação do fluxo de Godunov pode ser simplificado se $v_{hs}(\phi)\phi$ tiver apenas um único máximo local em $\phi = \hat{\phi}$. Assim, pode-se descrever o algoritmo como mostrado no Algoritmo 1 (BÜRGER *et al.*, 2013).

Algorithm 1 Computação de G_j

Entradas: concentrações C_j e C_{j+1} , função $v_{hs}(\phi)\phi$ com apenas um máximo em $\hat{\phi}$

Saída: valor de G_j

if $\phi_j \leq \phi_{j+1}$ **then**

$$G_j \leftarrow \min\{v_{hs}(\phi_j)\phi_j, v_{hs}(\phi_{j+1})\phi_{j+1}\}$$

else

if $(\hat{\phi} - \phi_j) \cdot (\hat{\phi} - \phi_{j+1}) < 0$ **then**

$$G_j \leftarrow v_{hs}(\hat{\phi})\hat{\phi}$$

else

$$G_j \leftarrow \max\{v_{hs}(\phi_j)\phi_j, v_{hs}(\phi_{j+1})\phi_{j+1}\}$$

end if

end if

Bürger *et al.* (2017), levando em consideração as definições acima apresentadas, reescreve (6.1) pelo método das linhas como

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_j}{dt} = & -\frac{F_j^{num} - F_{j-1}^{num}}{A_{j-1/2}\Delta z} + \frac{A_j J_{comp,j}^{num} - A_{j-1} J_{comp,j-1}^{num}}{A_{j-1/2}\Delta z} + \frac{A_j J_{disp,j}^{num} - A_{j-1} J_{disp,j-1}^{num}}{A_{j-1/2}\Delta z} \\ & + \frac{Q_f(t)\phi_f(t)}{A_{j-1/2}\Delta z} \delta_{j,j_f}, \quad j = -1, \dots, N+2, \quad (6.2) \end{aligned}$$

em que $\delta_{j,j_f} = 1$ se $j = j_f$ e $\delta_{j,j_f} = 0$, caso contrário. Utiliza-se o solucionador dado por

$$\frac{d\phi_j}{dt} \approx \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t}, \quad (6.3)$$

em que $\phi_j^n := \phi_j(t_n) \approx \phi(z_j, t_n)$ é a concentração aproximada no ponto discreto $t_n = n\Delta t$ e $n = 0, 1, 2, \dots$, é defendido por Diehl (2015) como suficiente para resolução do problema em questão. Com isso, inserindo (6.3) em (6.2) pode-se escrever o método numérico explícito como

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} = & \phi_j^n - \frac{\Delta t}{A_{j-1/2}\Delta z} (F_j^{num,n} - F_{j-1}^{num,n} - A_j J_{comp,j}^{num,n} + \\ & A_{j-1} J_{comp,j-1}^{num,n} - A_j J_{disp,j}^{num,n} + A_{j-1} J_{disp,j-1}^{num,n} - Q_f^n C_f^n \delta_{j,j_f}), \\ & j = -1, \dots, N+2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.4) \end{aligned}$$

em que o índice n representa a avaliação de uma função dependente t em $t = t_n$.

6.3 Condição de estabilidade

Para uma dada discretização espacial, ou seja, definido um passo Δz , deve-se computar (BÜRGER *et al.*, 2017)

$$M_1 := \max_{j=0, \dots, N+1} \left\{ \frac{A_{j-1}}{A_{j-1/2}}, \frac{A_j}{A_{j-1/2}} \right\},$$

$$M_2 := \max_{j=0, \dots, N+1} \left\{ \frac{A_j + A_{j-1}}{A_{j-1/2}} \right\},$$

$$A_{min} := \min_{j=0, \dots, N+1} A_{j-1/2},$$

$$Q_{max} := \max_{0 \leq t \leq T} Q_f(t),$$

$$\phi_{max} := \max_{0 \leq \phi \leq \phi_{max}} |(\mathbf{v}_{hs}(\phi)\phi)'|,$$

$$d_{comp}^{max} := \max_{0 \leq \phi \leq \phi_{max}} d_{comp}(\phi),$$

$$d_{disp}^{max} := \max_{\substack{-H \leq z \leq B \\ 0 \leq t \leq T}} d_{disp}(z, Q(t)).$$

Pode-se obter soluções estáveis para (6.4) escolhendo-se o passo de tempo Δt de acordo com a condição

$$\Delta t \leq \left(\frac{Q_{max}}{A_{min}\Delta z} + \frac{M_1\phi_{max}}{\Delta z} + \frac{M_2(d_{disp}^{max} + d_{comp}^{max})}{(\Delta z)^2} \right)^{-1}.$$

6.4 Simulações e Resultados

6.4.1 Testes Ilustrativos

Simula-se o modelo apresentado no capítulo para ambientação e melhor compreensão do método desenvolvido. O espessador usado para as simulações ilustrativas em Bürger *et al.* (2017) é apresentado em Bürger *et al.* (2012) e tem as características apresentadas na Tabela 6.1 e Figura 6.1.

As simulações são iniciadas com o perfil de concentração dado por

$$\phi_0(z) = \begin{cases} 0 \text{ kg/m}^3, & \text{para } -1 \text{ m} \leq z < 0 \text{ m}, \\ 0,7 \text{ kg/m}^3, & \text{para } 0 \text{ m} \leq z < 1 \text{ m}, \\ \{2(\frac{z}{1 \text{ m}} - 1) + 8\} \text{ kg/m}^3, & \text{para } 1 \text{ m} \leq z \leq 4 \text{ m}, \end{cases}$$

Tabela 6.1: Características do espessador usado para simulação do modelo de Bürger *et al.* (2017)

Variável	Valores
Diferença de densidade ($\Delta\rho$)	1562 [kg/m ³]
Diâmetro superior	26 m
Diâmetro inferior	1 m
H	1 m
B	4 m
Diâmetro do <i>feedwell</i>	3 m

Fonte: Bürger *et al.* (2017).

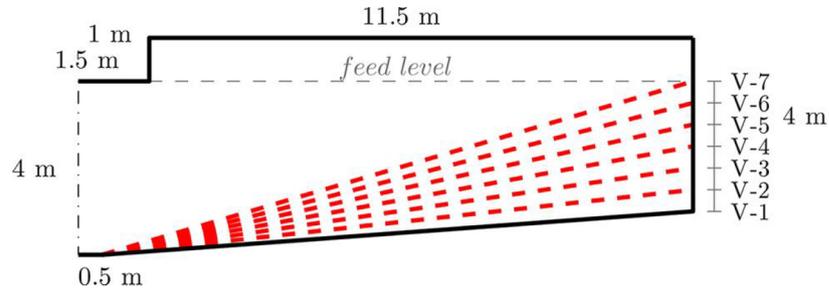


Figura 6.1: Ilustração da metade simétrica do espessador usado para simulação do modelo de espessador com área variável. As linhas pontilhadas em vermelho indicam diferentes inclinações para o fundo.

Fonte: Bürger *et al.* (2017).

cuja curva é apresentada na Figura 6.2. Ainda, tem-se que a concentração da alimentação é

$$\phi_f(t) = \begin{cases} 5,2 \text{ kg/m}^3, & \text{para } t \leq 80 \text{ h}, \\ 4,0 \text{ kg/m}^3, & \text{para } 80 \text{ h} < t \leq 150 \text{ h}, \\ 5,5 \text{ kg/m}^3, & \text{para } t > 150 \text{ h}, \end{cases}$$

sendo aplicadas as vazões no espessador, dadas por

$$Q_f(t) = \begin{cases} 265 \text{ m}^3/\text{h}, & \text{para } t \leq 55 \text{ h}, \\ 250 \text{ m}^3/\text{h}, & \text{para } 55 \text{ h} < t \leq 170 \text{ h}, \\ 270 \text{ m}^3/\text{h}, & \text{para } t > 170 \text{ h}, \end{cases}$$

$$Q_u(t) = \begin{cases} 65 \text{ m}^3/\text{h}, & \text{para } t \leq 55 \text{ h}, \\ 50 \text{ m}^3/\text{h}, & \text{para } 55 \text{ h} < t \leq 170 \text{ h}, \\ 70 \text{ m}^3/\text{h}, & \text{para } t > 170 \text{ h}, \end{cases}$$

$$Q_e(t) = 200 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Para demonstração do efeito da variação da área, Bürger *et al.* (2017) altera a inclinação

do fundo do equipamento, aumentando ou reduzindo a capacidade volumétrica. Na Figura 6.1, são apresentadas sete condições diferentes para o espessador em questão, sendo V-1 a condição em que a inclinação do fundo é a menor e igual a $1/12,5 = 0,08$. As inclinações de V-2 a V-7 são 0,12, 0,16 ... 0,32.

Todos os espessadores tem a mesma área da seção superior e inferior, sendo elas iguais a $A(-1\text{ m}) = \pi(13^2 - 1,5^2) = 523,86\text{ m}^2$ e $A(4\text{ m}) = \pi(0,5^2) = 0,78\text{ m}^2$, respectivamente. Contudo, o volume entre cada um dos espessadores varia consideravelmente, partindo de $2300,69\text{ m}^3$ do espessador V-1 e chegando a $1260,40\text{ m}^3$ para o espessador V-7.

As simulações são realizadas com um tempo total de 240 horas (10 dias), com um passo espacial $dz = 0,08\text{ m}$. A Figura 6.3 apresenta não só os perfis de concentração das simulações de V-1, V-3 e V5, como também o perfil de concentração V-1 obtido e apresentado em Bürger *et al.* (2017). Com isso, é possível comparar os resultados alcançados no presente trabalho com os resultados de referência. Além disso, é possível observar o efeito da variação de capacidade volumétrica entre os espessadores. No caso do espessador V-1, as partículas sólidas se concentram na parte inferior do equipamento, ao passo que em V-5 há uma distribuição de partículas sólidas por praticamente todo o espessador.

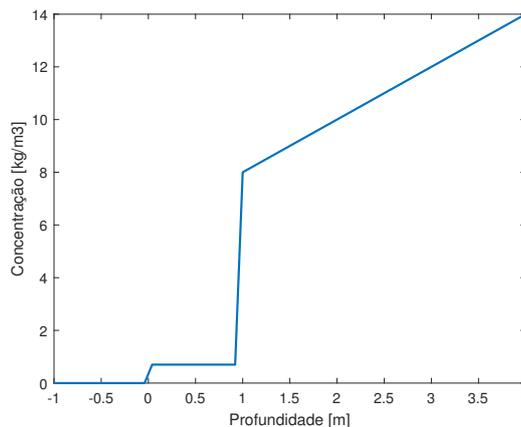


Figura 6.2: Perfil inicial de concentração para as simulações do modelo de Bürger *et al.* (2017).
Fonte: O autor.

As duas variáveis de maior interesse para o trabalho — a concentração no *underflow* e a altura da interface — são mostradas nas Figuras 6.4 e 6.5, respectivamente. Embora apresentem comportamento similar, as curvas de concentração no *underflow* (Figura 6.4 (a)) obtidas das simulações deste trabalho diferem das curvas apresentadas em Bürger *et al.* (2017) não só pelo fato de entrarem em regime em patamares acima dos obtidos na referência, mas também pelo fato de as concentrações parecerem convergir para um mesmo ponto (aproximadamente $22,2\text{ kg/m}^3$) em todos os diferentes espessadores enquanto que nas simulações de Bürger *et al.* (2017) há uma diferença significativa entre as concentrações no *underflow* de cada espessador (V-1 a V-7). Do ponto de vista da aplicação de técnicas de controle para a concentração no *underflow*, essas diferenças não aparentam ser um grande problema, visto que o sistema responde às variações

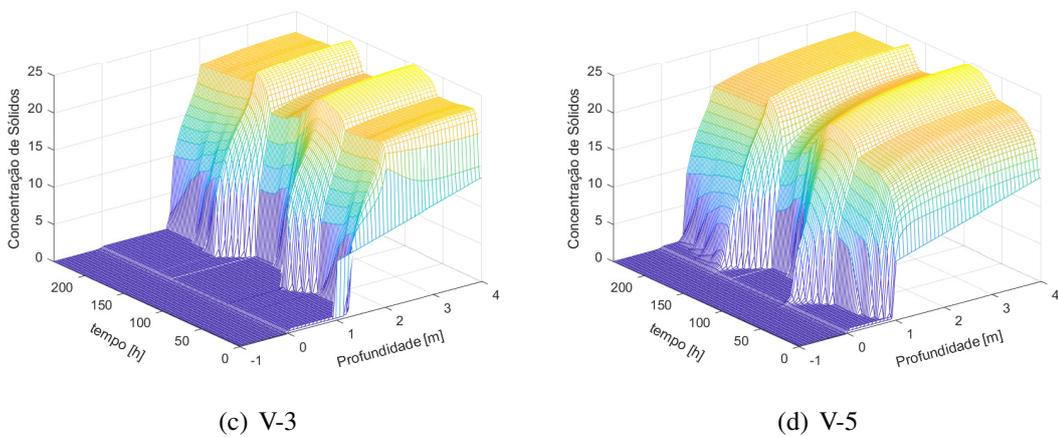
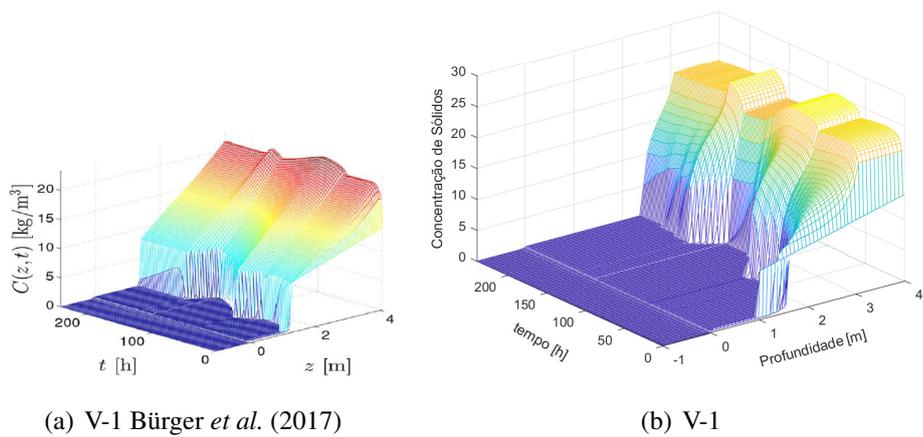


Figura 6.3: Perfis de concentração de sólidos para espessadores com diferentes inclinações do fundo.

Fonte: O autor.

nas entradas em consonância com os resultados de Bürger *et al.* (2017).

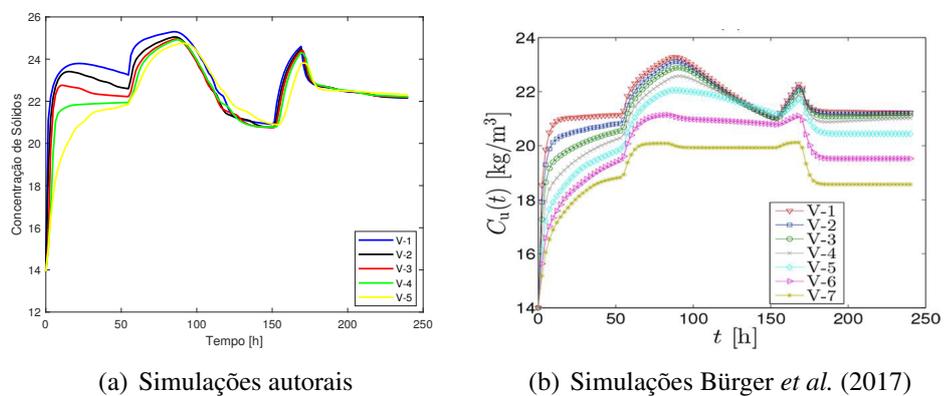
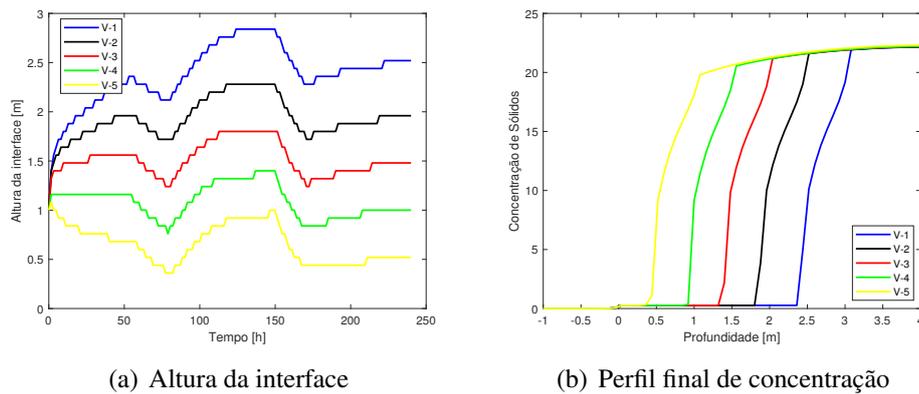


Figura 6.4: Concentração no *underflow* ao longo do tempo para espessadores com diferentes inclinações do fundo.

Fonte: O autor.

A grande vantagem de utilizar-se o modelo de Bürger *et al.* (2017) para representação



(a) Altura da interface

(b) Perfil final de concentração

Figura 6.5: Altura da interface ao longo do tempo e concentração final para espessadores com diferentes inclinações do fundo.

Fonte: O autor.

de espessadores é evidenciada nas curvas de altura da interface, apresentadas na Figura 6.5 (a). Considerar os espessadores completamente cilíndricos, como em Betancourt *et al.* (2014), pode representar um erro significativo na determinação da altura da interface. Para se ter uma ideia, a diferença entre a altura da interface em $t = 240$ do espessador V-1 para o espessador V-5 é de cerca de 2 metros, o que representa 40% da altura total do espessador (5 metros).

6.5 Conclusão

Tratou-se no presente capítulo do modelo de espessador de Bürger *et al.* (2017) e suas vantagens e desvantagens em relação ao modelo de Betancourt *et al.* (2014). Simula-se o efeito da variação da área de seção transversal em exemplos ilustrativos que justificam a abordagem apresentada, apesar da falta de validação com dados reais.

7 Modelo de Espessador Cilíndrico-Cônico Sujeito à Adição de Floculante

Neste capítulo, desenvolve-se o modelo matemático de espessadores com a área da seção transversal variável, considerando-se a adição de floculante. A proposta consiste em realizar alterações no modelo desenvolvido em Betancourt *et al.* (2014), considerando a metodologia aplicada em Bürger *et al.* (2017) para espessadores com a área da seção transversal variável, obtendo-se, portanto, um novo modelo representativo de espessadores.

O modelo de espessador desenvolvido neste trabalho pode ser representado pela ilustração apresentada na Figura 7.1. Considera-se a presença da região referente ao poço de alimentação e a região com formato de tronco de cone no fundo do espessador.

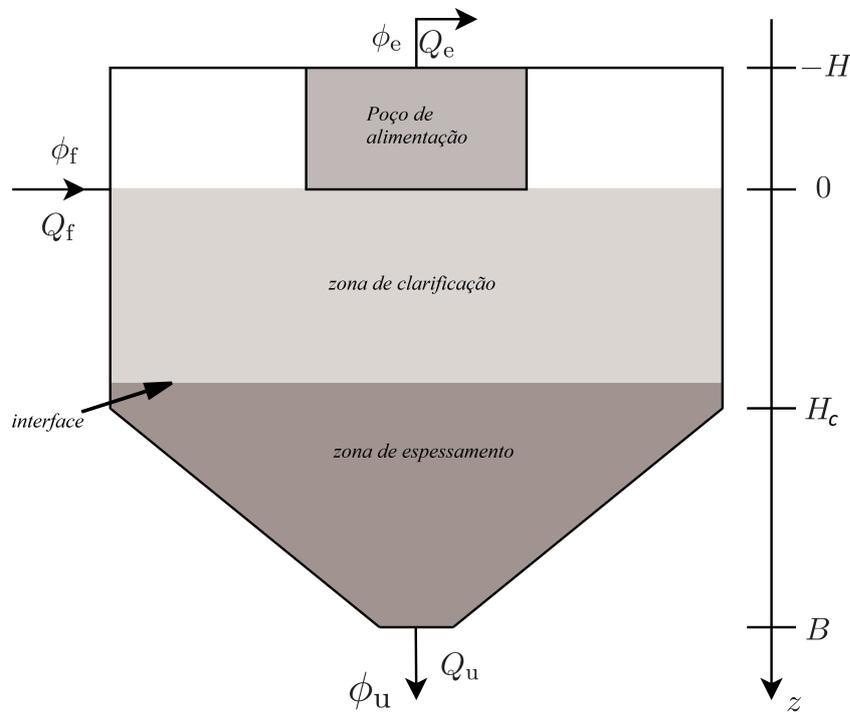


Figura 7.1: Ilustração esquemática do modelo unidimensional de um espessador.

Fonte: O autor.

Diferentemente do modelo de espessador de Betancourt *et al.* (2014), leva-se em consideração a variação da área da seção transversal. Para tanto, define-se o vetor de área da seção transversal considerando-se três regiões distintas: a região entre $-H < z \leq 0$, em que subtrai-se a área do poço de alimentação; a região com área constante ($0 < z \leq H_c$); e, por último, a região com área variável ($H_c < z \leq B$). Portanto, $A(z)$ é dado por

$$A(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}(D_{max}^2 - D_{fw}^2), & \text{para } -H < z \leq 0 \\ \frac{\pi}{4}D_{max}^2, & \text{para } 0 < z \leq H_c \\ \frac{\pi}{4}D(z)^2, & \text{para } H_c < z \leq B, \end{cases}$$

em que $D(z)$ é o diâmetro do espessador, com variação linear para $H_c < z \leq B$, assumindo o seu valor máximo, D_{max} , se $z \geq H_c$ e o valor mínimo, D_{min} , em $z = B$. Define-se assim D_{fw} como sendo o diâmetro do poço de alimentação do espessador.

7.1 Desenvolvimento Matemático

Primeiramente, deve-se considerar que a área da seção transversal é variável e depende da profundidade, denotada por $A(z)$. Pode-se, portanto, reescrever (5.9) e (5.10) como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{F}(\phi, w/\phi, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma(z) \frac{w}{\phi} \frac{\partial D(\phi)}{\partial z} \right) + \frac{Q_f(t) \phi_f(t)}{A(z)} \delta(z) \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w}{\phi} \bar{F}(\phi, k, z, t) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma(z) \frac{w^2}{\phi^2} \frac{\partial D(\phi)}{\partial z} \right) + \frac{Q_f(t) w_f(t)}{A(z)} \delta(z). \quad (7.2)$$

Definindo-se $Q(t)$ como

$$Q(t) = \begin{cases} -Q_e(t), & \text{para } z < 0, \\ Q_u(t), & \text{para } z > 0, \end{cases}$$

pode-se redefinir $\bar{F}(\phi, k, z, t)$ como

$$\bar{F}(\phi, k, z, t) = \begin{cases} Q(t) \phi / A(z), & \text{para } z < -H \\ Q(t) \phi / A(z) + k v_{hs}(\phi) \phi, & \text{para } -H < z < B \\ Q(t) \phi / A(z), & \text{para } z > B \end{cases}$$

Ainda, multiplicando-se (7.1) e (7.2) por $A(z)$, tem-se

$$\frac{\partial (A(z) \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (A(z) \bar{F}(\phi, w/\phi, z, t)) = \frac{\partial}{\partial z} \left(A(z) \gamma(z) \frac{w}{\phi} \frac{\partial D(\phi)}{\partial z} \right) + Q_f(t) \phi_f(t) \delta(z) \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial (A(z) w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w}{\phi} A(z) \bar{F}(\phi, k, z, t) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(A(z) \gamma(z) \frac{w^2}{\phi^2} \frac{\partial D(\phi)}{\partial z} \right) + Q_f(t) w_f(t) \delta(z). \quad (7.4)$$

Com isso, tem-se como representação matemática final de espessadores deste trabalho o conjunto de equações diferenciais parciais (7.3) e (7.4).

7.2 Procedimento numérico para simulação

O procedimento numérico para solução das equações e simulação de espessadores é baseado no método apresentado em Bürger *et al.* (2017) e, principalmente, em Betancourt *et al.* (2014), cujo desenvolvimento é apresentado na Seção 5.1.5. Diferentemente do procedimento previamente apresentado, agora inclui-se o tratamento da área da seção transversal A como dependente de z .

Note que (7.3) e (7.4) podem ser reescritas como

$$\frac{\partial(A(z)\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(Q(z,t)(\phi - \phi_f) + A(z)\gamma(z)k(\phi,w)v_{hs}(\phi)\phi) = \frac{\partial}{\partial z}\left(A(z)\gamma(z)w\frac{\partial D_1(\phi)}{\partial z}\right), \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial(A(z)w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(Q(z,t)(w - w_f) + A(z)\gamma(z)k(\phi,w)v_{hs}(\phi)w) = \frac{\partial}{\partial z}\left(A(z)\gamma(z)wk(w,\phi)\frac{\partial D_1(\phi)}{\partial z}\right), \quad (7.6)$$

considerando-se a incorporação do termo da alimentação no fluxo convectivo, assim como em (5.14) e (5.15).

Da mesma forma que em Betancourt *et al.* (2014), divide-se a simulação em duas partes, linear e não linear. As parcelas lineares de (7.5) e (7.6) são

$$\frac{\partial(A(z)\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(Q(z,t)(\phi - \phi_f)) = 0,$$

$$\frac{\partial(A(z)w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(Q(z,t)(w - w_f)) = 0,$$

que podem ser simuladas fazendo-se

$$\mathbf{u}_j^{n+1/2} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\lambda}{A_{j-1/2}}(Q_{j+1/2}^n(\mathbf{u}_{j+1/2}^n - \mathbf{u}_f^n) - Q_{j-1/2}^n(\mathbf{u}_{j-1/2}^n - \mathbf{u}_f^n)),$$

em que $\mathbf{u}_j^n := (\phi_j^n, w_j^n)$, $\mathbf{u}_f^n := (\phi_f^n, w_f^n)$.

Recorrendo às definições apresentadas em (5.16), (5.17), (5.18), (5.19) e (5.20) e considerando apenas a parcela não linear de (7.5) e (7.6), ou seja,

$$\frac{\partial(A(z)\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(A(z)\gamma(z)k(\phi,w)v_{hs}(\phi)\phi) = \frac{\partial}{\partial z}\left(A(z)\gamma(z)w\frac{\partial D_1(\phi)}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial(A(z)w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(A(z)\gamma(z)k(\phi,w)v_{hs}(\phi)w) = \frac{\partial}{\partial z}\left(A(z)\gamma(z)wk(w,\phi)\frac{\partial D_1(\phi)}{\partial z}\right),$$

pode-se descrever a segunda parcela do método de simulação como

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} = & \phi_j^{n+1/2} - \frac{\lambda}{A_{j-1/2}} \left(A_j v_{j+1/2}^{n+1/2} \phi_j^{n+1/2} - A_{j-1} v_{j-1/2}^{n+1/2} \phi_{j-1}^{n+1/2} \right) \\ & + \frac{\mu}{A_{j-1/2}} \left(A_j \gamma_{j+1/2} w_{j+1/2}^{n+1/2} \left[D_1(\phi_{j+1}^{n+1/2}) - D_1(\phi_j^{n+1/2}) \right] \right. \\ & \left. - A_{j-1} \gamma_{j-1/2} w_{j-1/2}^{n+1/2} \left[D_1(\phi_j^{n+1/2}) - D_1(\phi_{j-1}^{n+1/2}) \right] \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_j^{n+1} = w_j^{n+1/2} - \frac{\lambda}{A_{j-1/2}} & \left(A_j v_{j+1/2}^{n+1/2} w_j^{n+1/2} - A_{j-1} v_{j-1/2}^{n+1/2} w_{j-1}^{n+1/2} \right) \\
& + \frac{\mu}{A_{j-1/2}} \left(A_j \gamma_{j+1/2} w_{j+1/2}^{n+1/2} k_{j+1/2}^{n+1/2} \left[D_1 \left(\phi_{j+1}^{n+1/2} \right) - D_1 \left(\phi_j^{n+1/2} \right) \right] \right. \\
& \left. - A_{j-1} \gamma_{j-1/2} w_{j-1/2}^{n+1/2} k_{j-1/2}^{n+1/2} \left[D_1 \left(\phi_j^{n+1/2} \right) - D_1 \left(\phi_{j-1}^{n+1/2} \right) \right] \right).
\end{aligned}$$

7.3 Condição de estabilidade

Analogamente à condição CFL apresentada em Betancourt *et al.* (2014) e considerando a variação na área de seção transversal, como em Bürger *et al.* (2017), tem-se que o método aqui desenvolvido é estável se o passo de tempo for escolhido de acordo com a regra

$$\max\{C_1, C_2, C_3\} \leq 1,$$

em que

$$C_1 = \lambda \max_{0 \leq t \leq T} \frac{Q_f(t)}{A_{min}}, \quad (7.7)$$

com A_{min} definido como

$$A_{min} := \min_{j=0, \dots, N+1} A_{j-1/2},$$

e T o tempo total de simulação. Os termos C_2 e C_3 , assim como em Betancourt *et al.* (2014), são dados por

$$C_2 = \lambda \left(\max_{0 \leq \phi \leq 1} v_{hs}(\phi) + \max_{0 \leq \phi \leq 1} \dot{v}_{hs}(\phi) \right) + 2\mu \max_{\phi_c \leq \phi \leq 1} \frac{d(\phi)}{\phi},$$

e

$$C_3 = \lambda \max_{0 \leq \phi \leq 1} v_{hs}(\phi) + 2 \frac{\mu}{\phi_c} \max_{\phi_c \leq \phi \leq 1} \frac{d(\phi)}{\phi}.$$

7.4 Simulações e Resultados

Define-se como propósito desta seção primeiramente demonstrar o correto funcionamento do método. Para tanto, mantém-se a área da seção transversal constante de modo que seja possível comparar os resultados do modelo proposto de espessador com o modelo de Betancourt *et al.* (2014). Na sequência, será tratada a variação da área da seção transversal, em que será variada a característica geométrica do espessador e observado o efeito disso na altura da interface. Por fim, avalia-se o desempenho computacional do método para diferentes situações e valida-se o modelo com os dados reais de operação do espessador de Carajás, descrito na Seção 5.2.2.

7.4.1 Testes Ilustrativos

7.4.1.1 Espessador Cilíndrico

Considera-se o espessador cilíndrico apresentado na Seção 5.2.1 como referência para avaliação do correto funcionamento do modelo proposto. Mantendo-se a área da seção transversal constante, espera-se obter resultados similares aos obtidos no Capítulo 5. Opta-se por utilizar o Cenário 2, apresentado na Seção 5.2.1.2 para tal objetivo.

Apresenta-se na Figura 7.2, os perfis de concentração volumétrica de sólidos obtidos da simulação dos dois modelos. Utiliza-se um passo de $dz = 0,025 \text{ m}$ para ambos os casos. A partir das curvas tridimensionais pode-se notar a aparente similaridade entre os dois resultados, contudo observando-se a Figura 7.3 pode-se ter uma avaliação mais acurada dos resultados. Os perfis de concentração no espessador após uma simulação de 200 horas de operação, apresentados na Figura 7.3(a) distinguem-se ligeiramente quanto à altura da interface, estando o modelo proposto mais próximo da altura esperada em regime ($1,26 \text{ m}$).

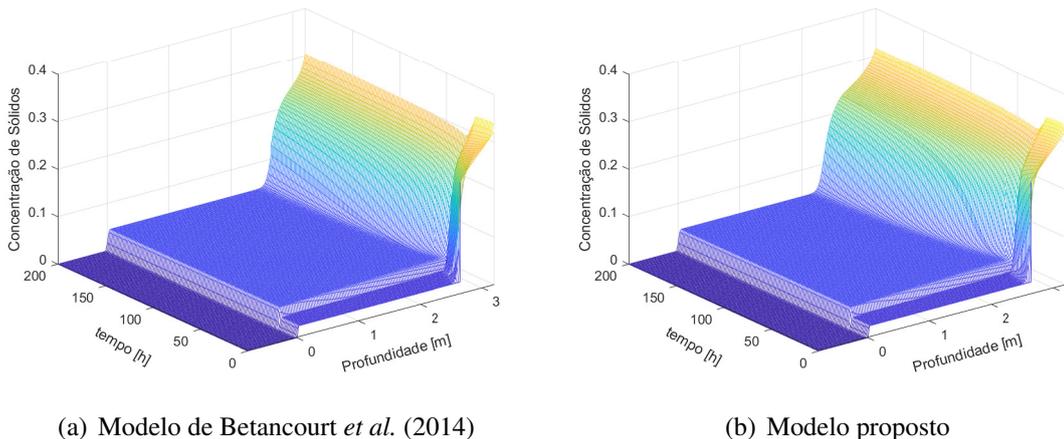


Figura 7.2: Perfil de concentração volumétrica de sólidos para o Cenário 2 do exemplo da Seção 5.2.1.2.

Fonte: O autor.

Por outro lado, a concentração volumétrica de sólidos no *underflow* no modelo de Betancourt *et al.* (2014) apresenta valores maiores em relação ao modelo proposto durante as 200 horas de simulação, chegando mais próximo do valor esperado de 0,32 em regime. Em $t = 200 \text{ h}$, $\phi_u = 0,3187$ no modelo de Betancourt *et al.* (2014) e $\phi_u = 0,3173$ no modelo proposto.

7.4.1.2 Variação na área da seção transversal

Nesta seção, são apresentados e avaliados os resultados para diferentes valores de H_c . O objetivo é visualizar o comportamento da concentração de sólidos dentro dos espessadores ao longo do período de simulação. Os espessadores considerados são baseados nos exemplos de Betancourt *et al.* (2014). Inicia-se a simulação com perfil de concentração nula em todo o

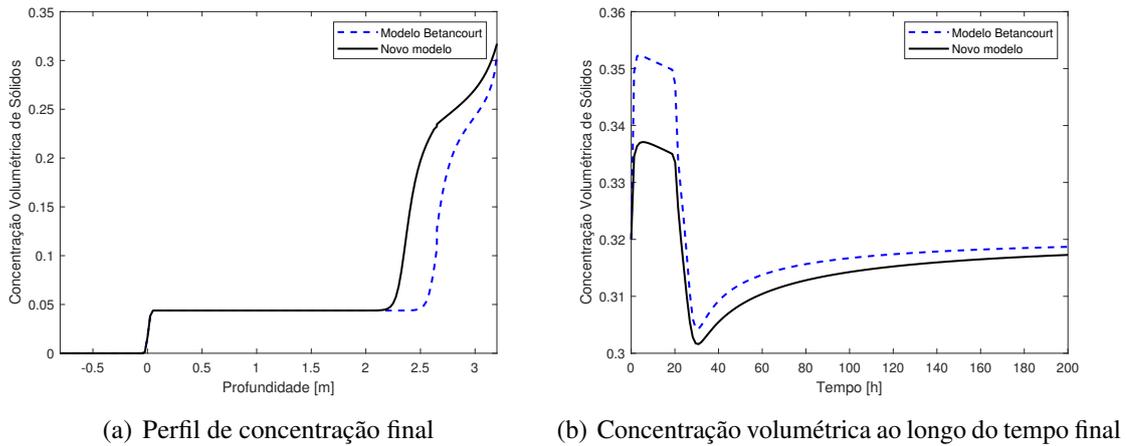


Figura 7.3: Comparativo das concentrações entre os modelos de Betancourt *et al.* (2014) e o modelo proposto.

Fonte: O autor.

espessador. Tem-se ainda que $u_d = 0,32$, $Q_f \phi_f = 60 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$, assim como no exemplo apresentado previamente. Em $t = 100 \text{ h}$, altera-se o flocculante de $k_f = 0,5061$ para $k_f = 0,9$.

É pertinente ressaltar que, para cada valor de H_c , há uma capacidade volumétrica muito distinta entre cada espessador. Para o caso em que o espessador é todo cilíndrico ($H_c = 3,2 \text{ m}$), o volume do espessador é de $V_{3,2\text{m}} = 11,31 \times 10^3 \text{ m}^3$. Desconsiderando-se, neste momento, o efeito da subtração da área do poço de alimentação, ou seja, $D_{fw} = 0 \text{ m}$ e com o espessador tendo uma construção com $H_c = 0 \text{ m}$, diâmetro máximo $D_{max} = 60 \text{ m}$ e diâmetro mínimo $D_{min} = 3 \text{ m}$, a capacidade volumétrica é de $V_{0\text{m}} \approx 5,44 \times 10^3 \text{ m}^3$.

Com isso, a diferença entre volumes para esses dois casos é de $5,87 \times 10^3 \text{ m}^3$. Essa grande diferença é motivo suficiente para crer que a altura da interface pode não estar bem representada no caso em que o espessador é considerado cilíndrico. Se a capacidade volumétrica é maior, as partículas sólidas tendem a se concentrar na parte inferior do equipamento. Por outro lado, se a capacidade volumétrica é menor, essas mesmas partículas sólidas tendem a se espalhar ao longo de todo o espessador. Esse efeito fica ainda mais evidente ao observar-se as Figuras 7.4 e 7.6.

Na Figura 7.5, é possível observar as concentrações no *underflow* para os diferentes espessadores. Apesar dos resultados bem próximos, nas simulações em que H_c é mais próximo de 0, a concentração demora mais para atingir o seu valor em regime de 0,32.

Analogamente, pode-se tirar as mesmas conclusões da variação de H_c para a variação de D_{min} . A Figura 7.7 apresenta os resultados para três valores distintos de D_{min} . Vale lembrar, de (7.7), que quanto menor o D_{min} , menor será dt , o que pode influenciar muito no tempo de simulação (BÜRGER *et al.*, 2017).

Investiga-se agora, o efeito da consideração do poço de alimentação no cálculo da variável vetor de áreas das seções transversais considerada no modelo desenvolvido em Bürger *et al.* (2017). Para tanto, fixa-se $H_c = 2,0 \text{ m}$ e varia-se o valor de D_{fw} . Conforme esperado, não ocorrem

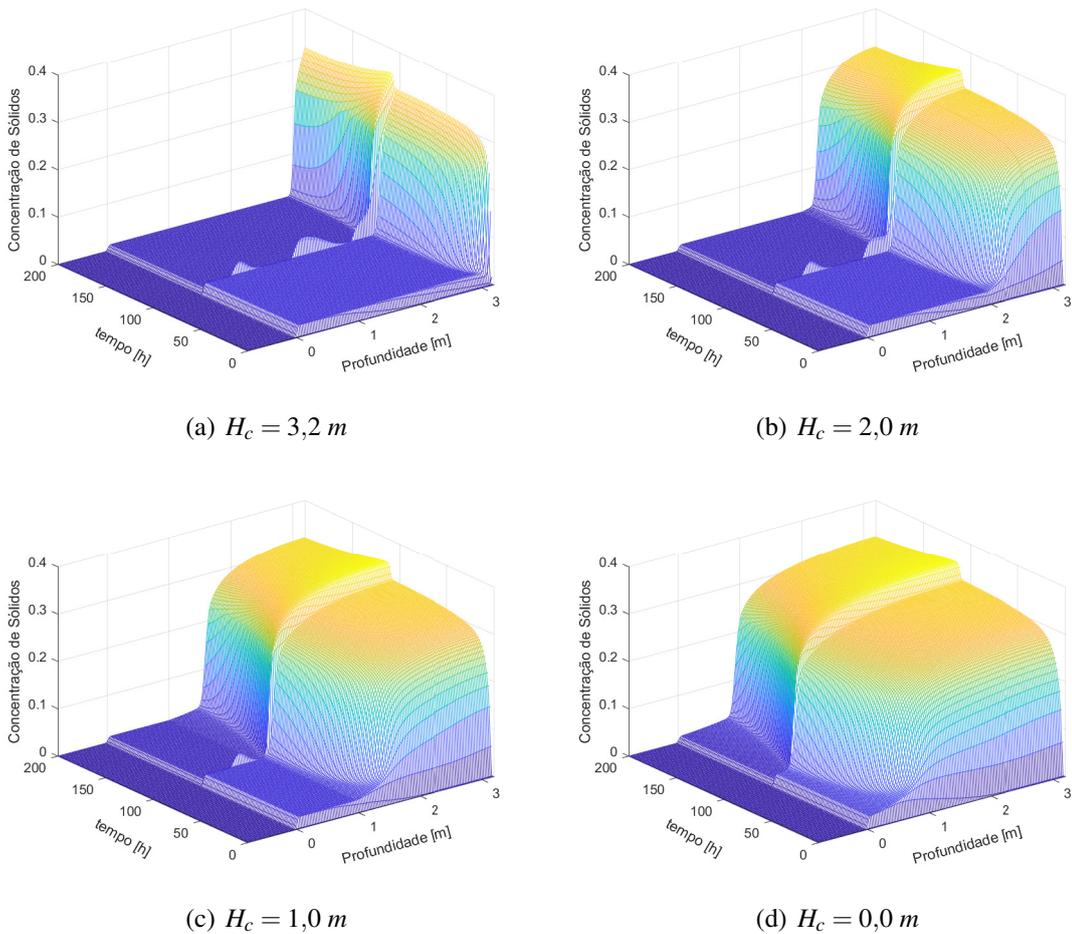


Figura 7.4: Perfis de concentração de sólidos para espessadores com diferentes H_c .
Fonte: O autor.

grandes alterações nos resultados das simulações como apresentado na Figura 7.8. O fato do poço de alimentação ocupar apenas um espaço que seria destinado à zona de clarificação, que é uma região usualmente com concentração volumétrica de sólidos pequena, explica o comportamento praticamente idêntico do sistema.

7.4.1.3 Avaliação de Desempenho Computacional

Da condição de convergência (Seção 7.3) está claro que quanto menor o passo dz , menor será o passo de tempo dt . Com o intuito de reduzir o tempo de simulação são realizadas duas avaliações: primeiramente dividir a simulação em etapas de modo que o *software* Matlab tenha que lidar com matrizes menores e, em seguida, comparar o desempenho do modelo para diferentes passos espaciais dz .

Na Tabela 7.1, são apresentados os tempos de execução de uma simulação com $dz = 0,01 \text{ m}$ e tempo total de 200 horas de simulação. Compara-se o caso em que se simula o modelo em um único passo, com 4, 10, 100 e 1000 passos. A cada passo, as matrizes parciais são armazenadas para que, no final da execução, sejam concatenadas para exibição dos resultados.

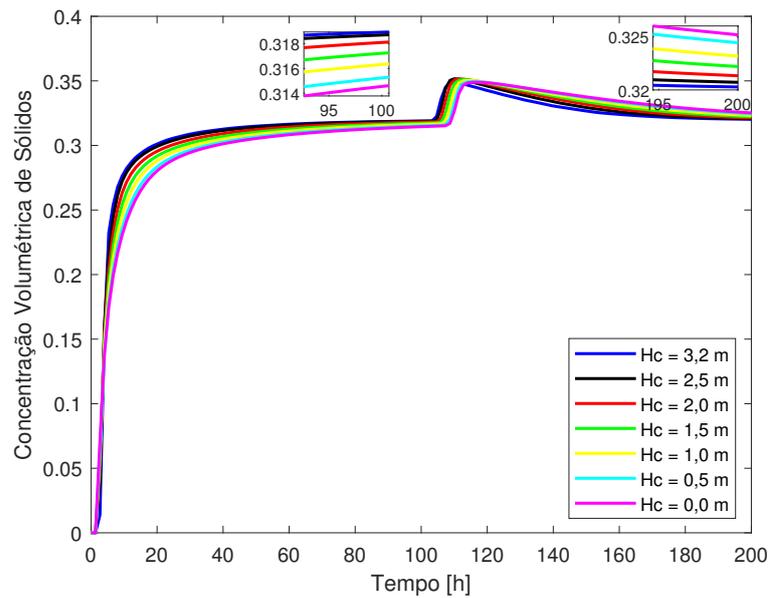


Figura 7.5: Concentração no *underflow* ao longo do tempo para espessadores com diferentes H_c .
 Fonte: O autor.

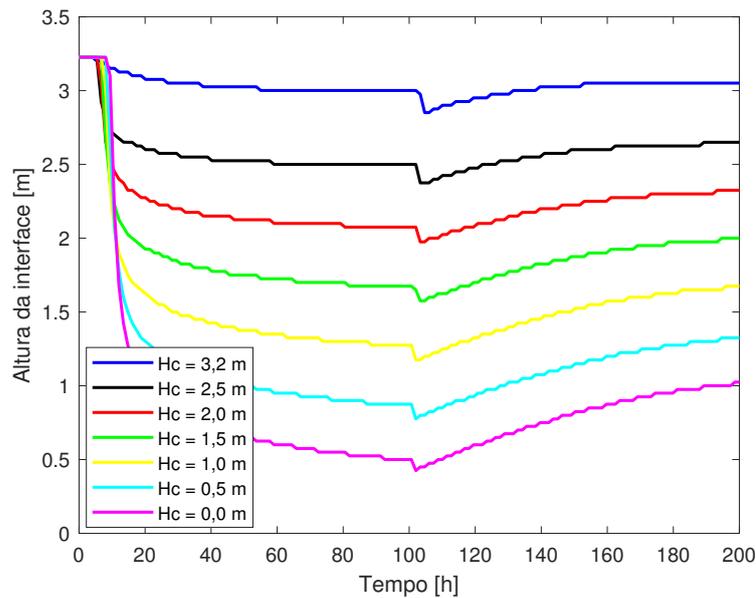


Figura 7.6: Altura da interface ao longo do tempo para espessadores com diferentes H_c .
 Fonte: O autor.

Nota-se que, para esse cenário, dividir a simulação em 100 passos foi uma boa escolha, reduzindo-se o tempo de simulação de 548,6 para 24,2 segundos. Contudo, seguir a tendência de dividir a simulação em mais passos e dividi-la em 1000 passos não foi a melhor estratégia. A possível causa é o tempo gasto para concatenar a grande quantidade de matrizes. Deve-se, portanto, levar esse tempo de concatenação das matrizes em conta ao escolher o número de divisões da simulação.

Outro questionamento feito é voltado para o tamanho do passo dz . A escolha de passos

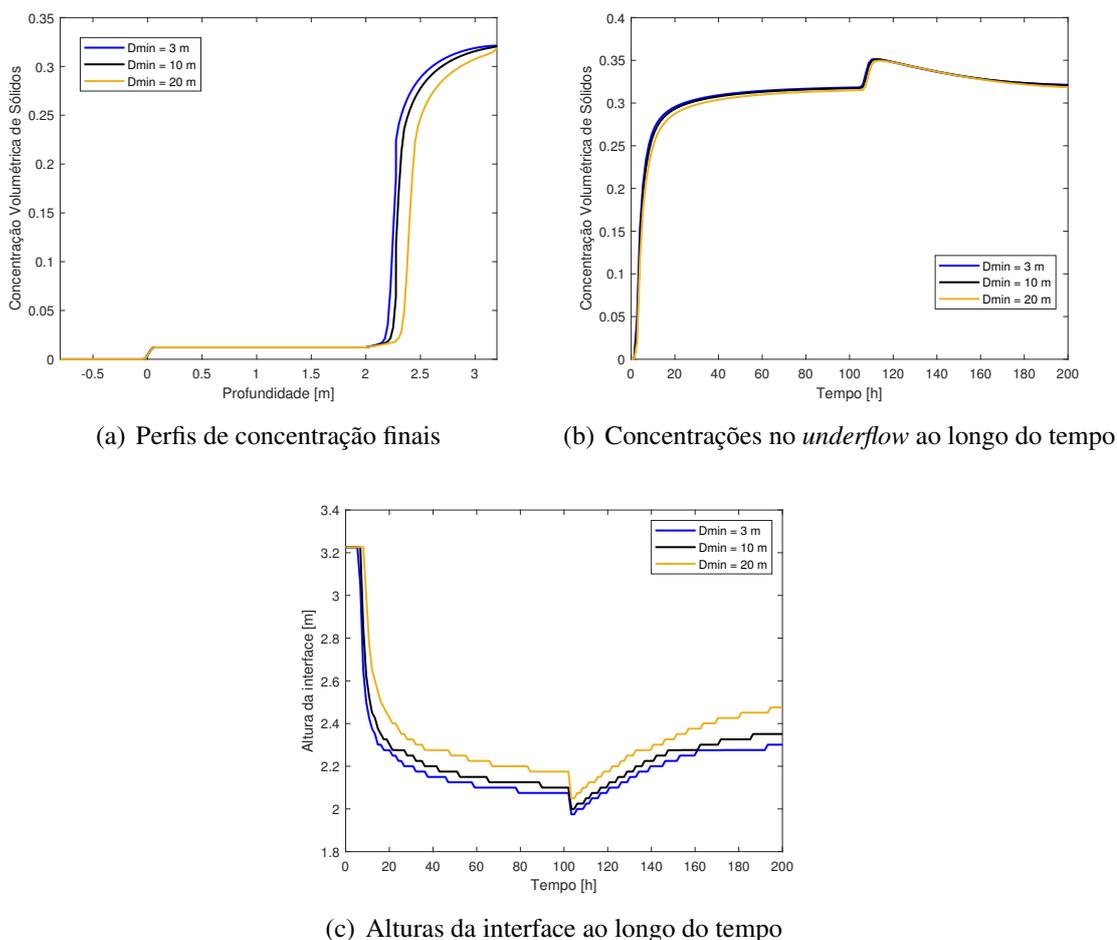


Figura 7.7: Curvas para avaliação da variação de D_{min} no cálculo do vetor de área sa seção transversal.

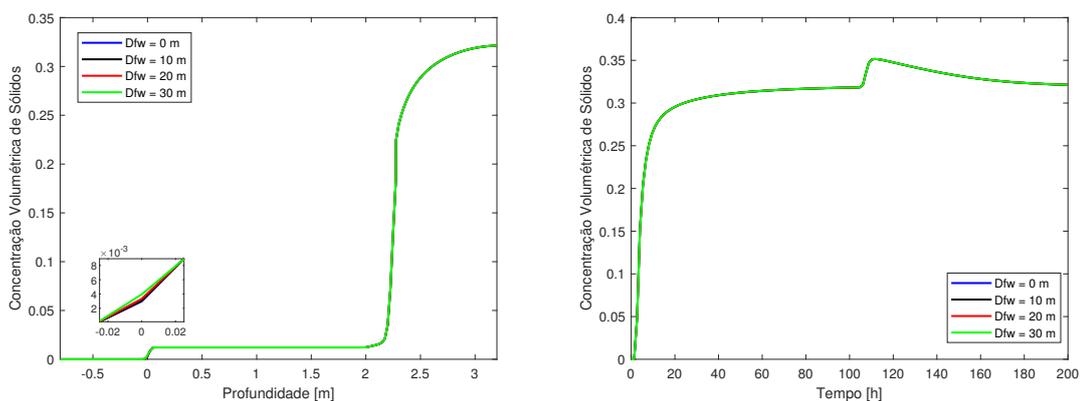
Fonte: O autor.

Tabela 7.1: Comparativo de tempos de execução para diferentes números de divisões da simulação.

nº de divisões	Tempo de execução (s)
1	548,6
4	55,3
10	27,4
100	24,2
1000	39,0

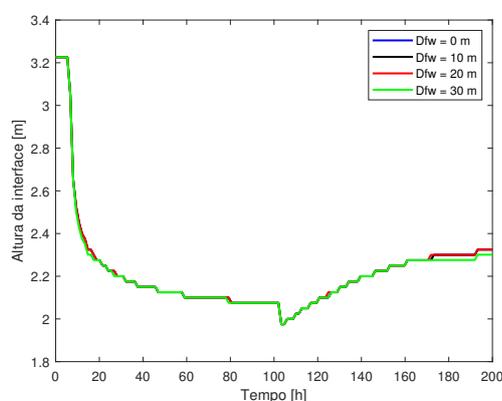
Fonte: O autor.

pequenos é sempre desejável, contanto que não haja extrapolação no tempo de simulação. Avalia-se a relação entre tamanho do passo dz e tempo de execução das simulações. Com a simulação dividida em 100 passos, pode-se observar os efeitos das escolhas nos resultados da simulação apresentada na Figura 7.9 e os tempos de simulação para cada passo dz na Tabela 7.2.



(a) Perfis de concentração finais

(b) Concentrações no *underflow* ao longo do tempo



(c) Alturas da interface ao longo do tempo

Figura 7.8: Curvas para avaliação da inclusão da área do poço de alimentação no cálculo do vetor de área sa seção transversal.

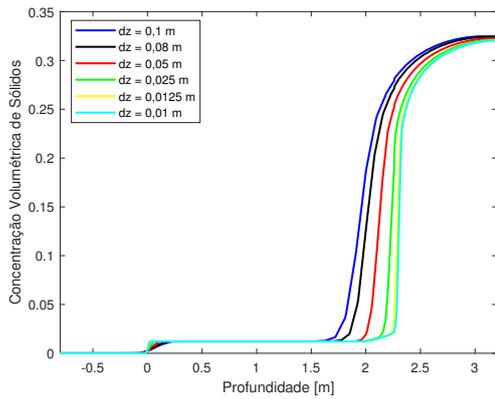
Fonte: O autor.

Tabela 7.2: Comparativo de tempos de execução para diferentes passos dz .

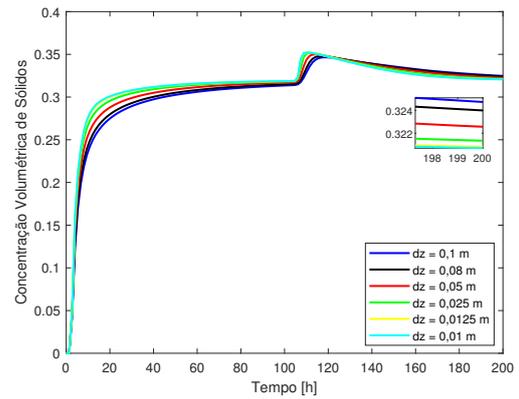
dz (m)	Tempo de execução (s)
0,1	24,2
0,08	31,5
0,05	51,5
0,025	191,2
0,0125	638,7
0,01	1000,2

Fonte: O autor.

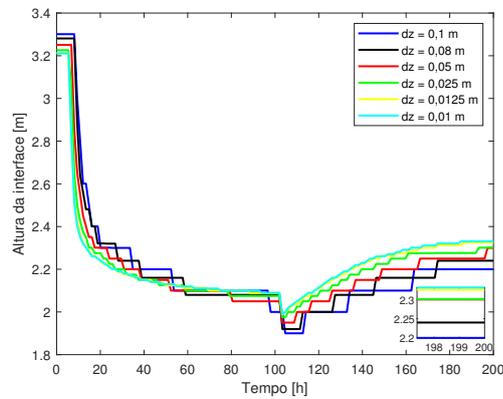
Das curvas de concentração volumétrica de sólidos no *underflow* apresentadas na Figura 7.9, observa-se que não há uma diferença significativa na variação da concentração para cada passo dz , sendo que a diferença entre as concentrações em $t = 200$ horas para as simulações em que dz assume o seu maior valor (0,1 m) e o menor (0,01 m) é de 0,004.



(a) Perfis de concentração finais



(b) Concentrações no *underflow* ao longo do tempo



(c) Alturas da interface ao longo do tempo

Figura 7.9: Curvas para avaliação da divisão do eixo espacial em diferentes passos dz .

Fonte: O autor.

Por outro lado, a escolha por um dz grande afeta não só a resolução dos resultados de altura da interface, como também o tempo de convergência para o valor esperado. Isso fica claro ao observar-se as curvas dos perfis de concentração finais e altura da interface na Figura 7.9. No caso em que $dz = 0,1 \text{ m}$ a altura da interface em $t = 200$ horas é de 2,20 metros, ao passo que para $dz = 0,01 \text{ m}$, a altura da interface é de 2,33 em $t = 200$ horas. Ou seja, uma diferença de 13 *cm*.

A decisão na escolha do passo dz requer uma avaliação do que há de tempo e recurso disponíveis para processamento, em oposição à acurácia e qualidade dos resultados que se deseja obter.

7.4.2 Validação do Modelo

Para validar o modelo final, consideram-se os dados apresentados na Tabela 5.1 do espessador de Carajás. Não foram fornecidas informações sobre as dimensões do poço de alimentação, considerando-se $D_{fw} = 3 \text{ m}$ para fins de simulação.

Os parâmetros do modelo assumem os mesmos valores informados na Seção 5.2.2.1, de

modo que seja possível realizar comparações entre o desempenho dos modelos. Apresentam-se os resultados para as mesmas duas janelas de dados usadas na validação do modelo de Betancourt *et al.* (2014), apresentado na Seção 5.2.2. Contudo, a comparação de desempenho pode ser feita apenas para o segundo intervalo de tempo, uma vez que o primeiro é usado como base para o ajuste dos parâmetros do modelo.

Inicia-se as simulações com um perfil de densidade unitário e aplica-se os mesmos sinais de entrada aos modelos, obtendo-se os resultados apresentados nas Figuras 7.10 a 7.12, em que são apresentados os resultados das últimas 24 horas de simulação dos modelos. Os perfis de densidade ao longo do espessador mostrados na Figura 7.10 dão uma boa ideia da importância de se considerar a variação na área da seção transversal. Enquanto o modelo proposto indica que o espessador opera em sua capacidade máxima e que há risco iminente de ocorrência de *overflow*, o modelo de Betancourt *et al.* (2014) mostra o contrário. Isso é justificado pelo fato de o modelo de Betancourt *et al.* (2014) considerar a área da seção transversal constante, o que representa dizer que o espessador tem uma capacidade volumétrica de $6735 m^3$. Contudo, a capacidade volumétrica real do espessador é de aproximadamente $4677,3 m^3$. Como a massa de sólidos no espessador real está mais distribuída do que no espessador cilíndrico, a altura da interface difere significativamente entre os dois modelos (Figura 7.12).

Tabela 7.3: Métricas de avaliação da validação do modelo final.

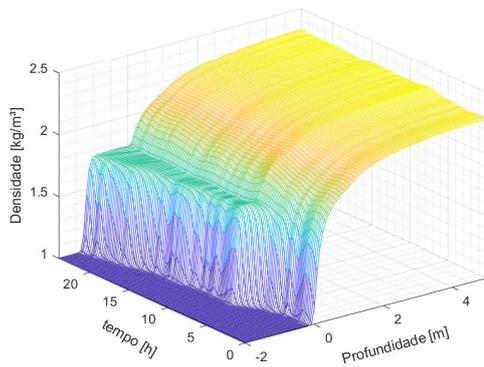
<i>Modelo</i>	<i>Intervalo</i>	<i>MSE</i>	<i>RMSE</i>	<i>NRMSE</i>
Final	1	$12,0 \times 10^{-4}$	0,0351	0,2818
	2	29×10^{-4}	0,054	0,296
Betancourt <i>et al.</i> (2014)	1	$13,0 \times 10^{-4}$	0,0361	0,290
	2	22×10^{-4}	0,047	0,259

Fonte: O autor.

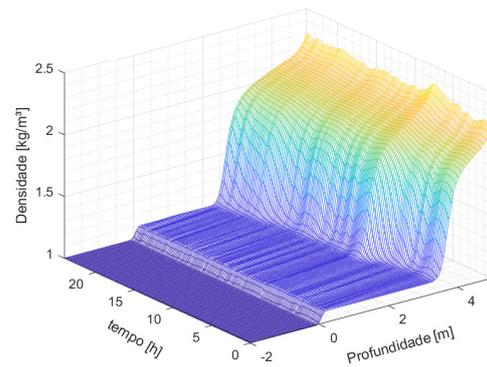
Ainda, pode-se acompanhar o desempenho dos dois modelos na determinação da densidade no *underflow* por meio da Figura 7.11 e da Tabela 7.3. O modelo de Betancourt *et al.* (2014) apresenta resultados ligeiramente superiores ao modelo final. Porém, deve-se ressaltar que a diferença apresentada é muito pequena para se tirar qualquer conclusão definitiva e não se conhece a qualidade da medição realizada. É importante frisar que o ajuste dos parâmetros é feito por tentativa e erro a partir do modelo de Betancourt *et al.* (2014) e é usado no modelo proposto. Talvez se os parâmetros fossem otimizados, melhores resultados poderiam ser obtidos em ambos os modelos.

7.5 Conclusão

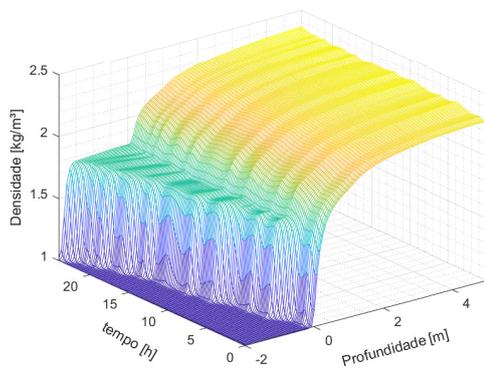
Neste capítulo, propõe-se um novo modelo e afirma-se que ele apresenta benefícios inéditos e que podem ser muito úteis na simulação de espessadores. Além de considerar a



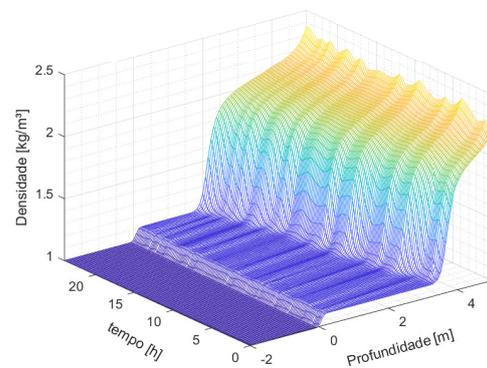
(a) Modelo Final - Intervalo 1



(b) Modelo Betancourt *et al.* (2014) - Intervalo 1



(c) Modelo Final - Intervalo 2

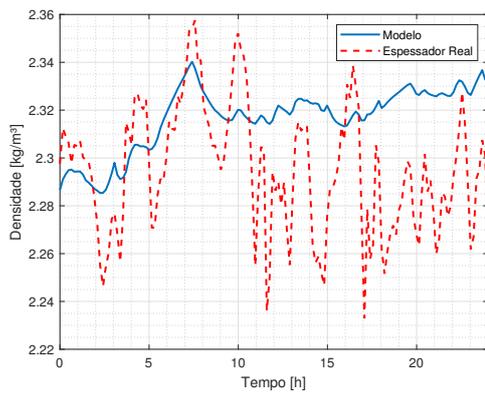


(d) Modelo Betancourt *et al.* (2014) - Intervalo 2

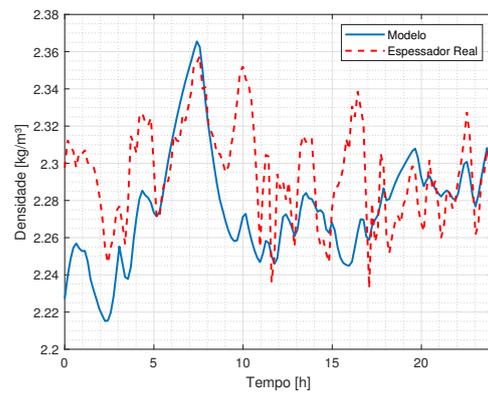
Figura 7.10: Perfis de concentração de sólidos nos dois intervalos de avaliação para os modelos de espessadores cilíndrico e cilíndrico-cônico.

Fonte: O autor.

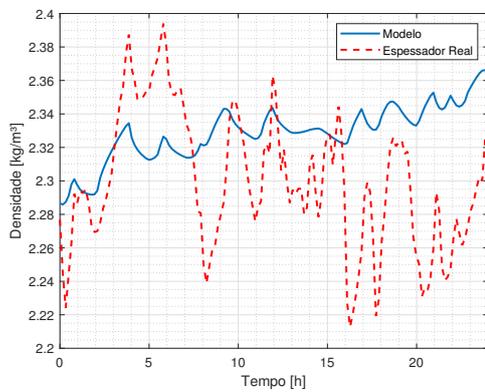
adição de floculante, algo pouco usual na literatura, o espessador proposto representa com fidelidade considerável a geometria de espessadores reais. Essas melhorias no modelo viabilizam a aplicação de técnicas de controle da altura da interface em função da dosagem de floculante adicionada à alimentação.



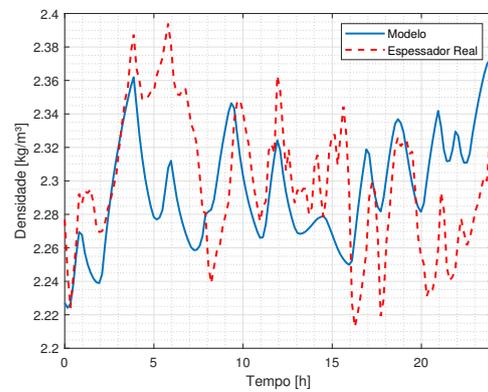
(a) Modelo Final - Intervalo 1



(b) Modelo Betancourt *et al.* (2014) - Intervalo 1



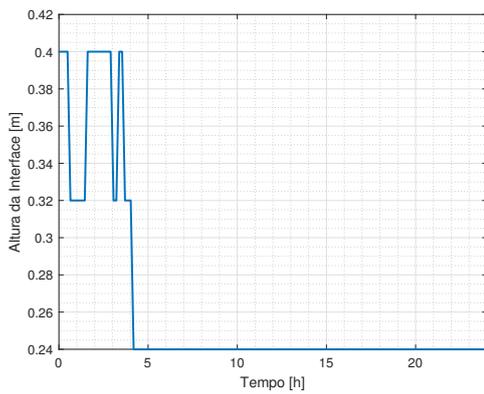
(c) Modelo Final - Intervalo 2



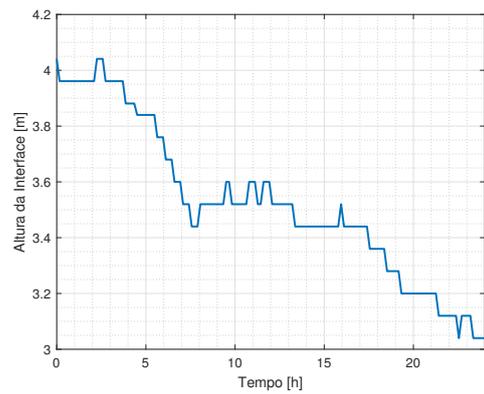
(d) Modelo Betancourt *et al.* (2014) - Intervalo 2

Figura 7.11: Densidade no *underflow* nos dois intervalos de avaliação para os modelos de espessadores cilíndrico e cilíndrico-cônico.

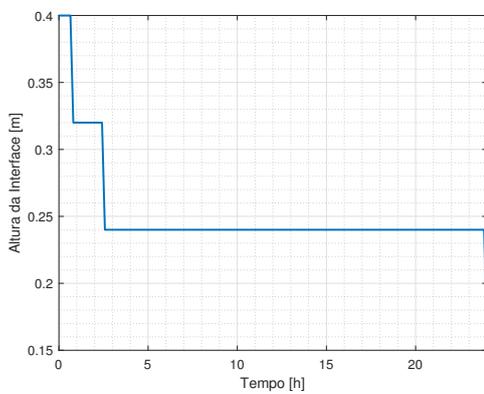
Fonte: O autor.



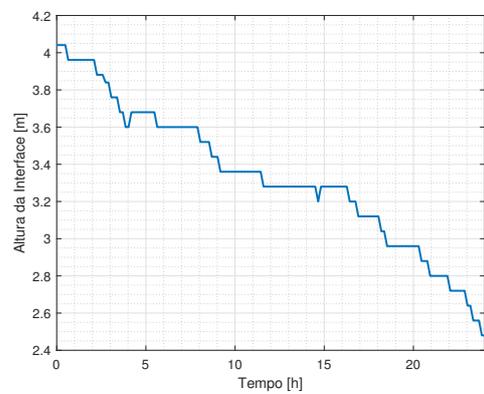
(a) Modelo Final - Intervalo 1



(b) Modelo Betancourt *et al.* (2014) - Intervalo 1



(c) Modelo Final - Intervalo 2



(d) Modelo Betancourt *et al.* (2014) - Intervalo 2

Figura 7.12: Altura da interface nos dois intervalos de avaliação para os modelos de espessadores cilíndrico e cilíndrico-cônico.

Fonte: O autor.

8 Aplicação de Controle: *Model Predictive Control*

Originado em meados dos anos 70, o *Model Predictive Control* (MPC) faz uso de um modelo do processo para obtenção de um sinal de controle por meio da minimização de uma função objetivo (CAMACHO e ALBA, 2013). O MPC designa uma ampla gama de estratégias de controle, cujas ideias básicas são (CAMACHO e ALBA, 2013):

- o uso explícito de um modelo para prever a saída do processo em instantes futuros (horizonte);
- cálculo de uma sequência de controle minimizando uma função objetivo;
- estratégia recursiva de modo que em cada instante o horizonte é deslocado para o futuro, o que envolve a aplicação do primeiro sinal de controle da sequência calculado em cada passo.

O que difere os vários algoritmos MPC são os modelos utilizados para representação do processo, os ruídos e a função de custo a ser minimizada. Esse tipo de controle é amplamente utilizado na indústria e no meio acadêmico, sendo aplicado em diversos processos. Estudos recentes, como Tan *et al.* (2017), de Almeida e Euzébio (2019) e Pereira *et al.* (2020) fizeram o uso do MPC aplicado em espessadores.

Como reportado em Camacho e Alba (2013), há uma série de vantagens ao usar-se o MPC, entre elas:

- é particularmente atraente ao público com conhecimento limitado de controle, devido ao fato dos conceitos serem intuitivos e a sintonia é relativamente fácil;
- pode ser usado em diversos processos, incluindo sistemas de fase não mínima, instáveis ou com longos atrasos;
- pode lidar facilmente com casos de sistemas multivariáveis;
- possui, intrinsecamente, compensação para tempo morto;
- a lei de controle linear é um controlador simples de se implementar;
- restrições podem ser incluídas sistematicamente durante o projeto do controlador de maneira conceitualmente simples;
- é extremamente útil quando referências futuras são conhecidas;

O MPC tem, no entanto, algumas desvantagens que devem ser mencionadas: a principal delas é a necessidade de um modelo apropriado do processo. Embora seja independente, o algoritmo é baseado no conhecimento prévio do modelo e quanto mais discrepante for o modelo

do processo real, mais o algoritmo será afetado. Além disso, o controle adaptativo costuma demandar um esforço computacional maior em relação a um PID, por exemplo.

A estratégia característica de todos os controladores da família do MPC é detalhada como segue (CAMACHO e ALBA, 2013):

1. As saídas futuras para um determinado horizonte de predição N são previstas em cada instante t usando o modelo do processo. Essas saídas previstas $y(t+k|t)$ para $k = 1, \dots, N$ dependem dos valores conhecidos (entradas e saídas) até o instante t e dos sinais de controle futuros $u(t+k|t)$, $k = 1 \dots N-1$, que devem ser calculados e enviados ao sistema.
2. O conjunto de sinais de controle futuros é calculado otimizando-se um determinado critério de modo que o processo seja mantido o mais próximo possível da trajetória de referência $w(t+k)$. Uma função quadrática dos erros entre o sinal de saída previsto e o sinal da trajetória de referência prevista é uma forma usual para esse objetivo.
3. O sinal de controle $u(t|t)$ é enviado ao processo, enquanto os próximos sinais de controle calculados são rejeitados, porque no próximo instante $y(t+1)$ é conhecido e o passo 1 é repetido com esse novo valor e todas as sequências são atualizadas. Dessa forma, $u(t+1|t+1)$, que a princípio será diferente de $u(t+1|t)$, é calculado.

Para ilustrar a estratégia apresenta-se a Figura 8.1, em que é mostrado o diagrama básico do MPC. Um modelo é usado para prever as saídas futuras da planta, baseado nos valores passados e atuais e nas ações de controle futuras propostas pelo otimizador. O otimizador leva em conta a função de custo (em que o erro de rastreamento futuro é considerado) e as restrições para calcular as ações de controle futuras. Como consequência, nota-se o papel fundamental do modelo do processo, que deve ser capaz de capturar a dinâmica do processo de modo a prever precisamente as saídas futuras (CAMACHO e ALBA, 2013).

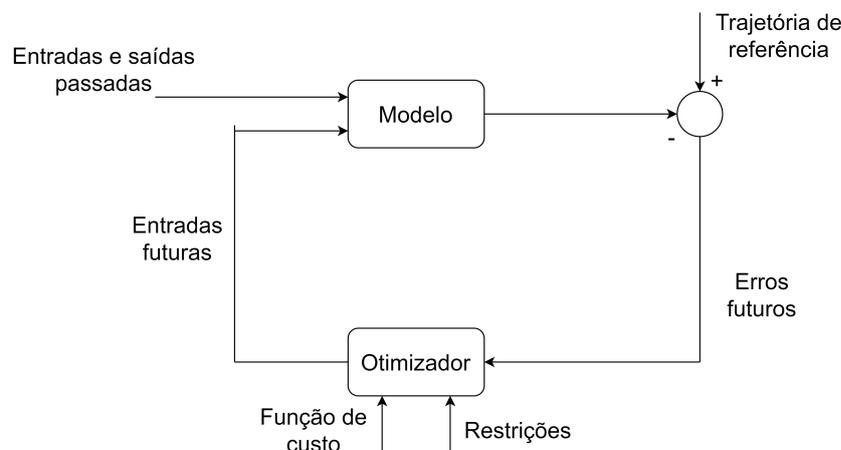


Figura 8.1: Estratégia básica do controlador MPC.

Fonte: Adaptado de Camacho e Alba (2013).

São diversas as metodologias pertencentes à classe MPC, cita-se o *Model Algorithmic Control*, o *Predictive Functional Control* e o *Dynamic Matrix Control* (DMC), sendo o último o objeto de estudo deste trabalho. Cada tipo de controlador da família MPC é definido por elementos comuns, como o modelo de predição, a função objetivo e a lei de controle. Detalhes sobre o DMC são apresentados na seção subsequente.

8.1 Controle por Matriz Dinâmica (DMC) para sistemas MIMO

O Controle por Matriz Dinâmica (DMC, do inglês *Dynamic Matrix Control*), que foi desenvolvido por funcionários da Shell Oil Co. e apresentado em Cutler e Ramaker (1980), é amplamente aceito no mundo industrial, principalmente no setor petroquímico. Dentre as razões para o seu sucesso pode-se citar o fato de o DMC cobrir tópicos como identificação do modelo, otimização global das plantas e a sua capacidade de lidar com processos multivariáveis (CAMACHO e ALBA, 2013). O modelo do processo aplicado na formulação do DMC é o modelo de resposta ao degrau do processo linearizado. Além disso, o DMC caracteriza-se pela minimização de uma função objetivo quadrática em um horizonte de predição para calcular as ações de controle futuras (PEREIRA *et al.*, 2020).

Apresenta-se aqui o desenvolvimento matemático do DMC para processos multivariáveis, como feito em Pereira *et al.* (2020) cujo desenvolvimento é baseado no trabalho desenvolvido em Camacho e Alba (2013). Considerando-se um processo de n_u entradas, os modelos lineares de resposta ao degrau podem ser representados por

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^{n_u} \sum_{i=1}^{N_k} g_i^{kj} \Delta u_k(t-i),$$

em que $y_j(t)$ é a j -ésima saída do processo, g_i^{kj} é a resposta da saída j ao degrau na entrada k , Δu_k é a k -ésima entrada do processo e N_k é o número de amostras em que a resposta ao degrau na entrada k atinge o seu estado estacionário. Sabendo que $f(t+\mu)$ é a resposta livre do sistema, isto é, a parcela independente das ações de controle futuras, os valores preditos ao longo do horizonte serão

$$y(t+\mu|t) = \sum_{i=\mu-m+1}^{\mu} g_i \Delta u(t+\mu-i) + f(t+\mu), \quad (8.1)$$

com $\mu = 1, 2, \dots, p$ e p e m sendo os horizontes de predição e de controle, respectivamente. Observa-se que (8.1) pode ser generalizada para sistemas lineares MIMO de $n_u \times n_y$ entradas e saídas utilizando o princípio da superposição na obtenção das n_y saídas preditas causadas pelas n_u entradas do sistema. Desse modo, o vetor de saídas preditas é definido por

$$\hat{\mathbf{y}} = [y_1(t+1|t), \dots, y_1(t+p|t), \dots, y_{n_y}(t+1|t), \dots, y_{n_y}(t+p|t)]^T.$$

Ainda, o vetor dos futuros sinais de controle pode ser definido por

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1(t), \dots, \Delta u_1(t+m-1), \dots, \Delta u_{n_u}(t), \dots, u_{n_u}(t+m-1)]^T,$$

e o vetor da resposta livre como

$$\mathbf{f} = [f_1(t+1|t), \dots, f_1(t+p|t), \dots, f_{n_y}(t+1|t), \dots, f_{n_y}(t+p|t)]^T.$$

Vale lembrar que a resposta livre é independente das ações de controle futuras, sendo, contudo, dependente dos valores passados de y_i e das ações de controle passadas. A dinâmica total do processo é descrita pela matriz \mathbf{G} , dada por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1j} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{i1} & G_{i2} & \dots & G_{ij} \end{bmatrix}$$

composta pelos elementos G_{ij} que relacionam a i -ésima resposta ao degrau correspondente à j -ésima entrada.

A partir da minimização da função de custo, dada por

$$\mathbf{J} = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{w})^t R (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{w}) + \Delta \mathbf{u}^t Q \Delta \mathbf{u}, \quad (8.2)$$

obtém-se a lei de controle. Tem-se em (8.2) que R e Q são matrizes definidas positivas para ponderação nos incrementos do sinal de controle e do erro no segmento de referência. Além disso, define-se a sequência de referências futuras, \mathbf{w} , dada por

$$\mathbf{w} = [w_1(t+1), \dots, w_1(t+p), \dots, w_{n_y}(t+1), \dots, w_{n_y}(t+p)]^T.$$

A solução analítica matricial para a função custo descrita em (8.2), considerando-se que não há restrições, é dada pela lei de controle descrita por

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{G}^T R \mathbf{G} + Q)^{-1} \mathbf{G}^T R (\mathbf{w} - \mathbf{f}). \quad (8.3)$$

Multiplica-se a primeira linha de $(\mathbf{G}^T R \mathbf{G} + Q)^{-1} \mathbf{G}^T R$ e a diferença entre o *setpoint* e a resposta livre dada em (8.3) para calcular-se o incremento de controle.

8.2 Resultados e Simulações

Os resultados da implementação de técnicas de controle ao espessador são apresentados em duas etapas, sendo a primeira referente aos resultados obtidos e apresentados em Pereira

et al. (2020), em que são aplicados dois controladores (um PI descentralizado e um DMC MIMO) ao modelo de espessador de Betancourt *et al.* (2014). Por fim, apresenta-se os resultados da aplicação dos controladores PI e DMC MIMO ao modelo de espessador proposto neste trabalho. O espessador utilizado é o espessador de concentrado de minério de ferro utilizado nos Capítulos 5 e 7.

Com os algoritmos dos dois modelos e controladores simulados em ambiente matemático MATLAB, avalia-se o desempenho dos controladores por meio do índice IAE (*Integral of Absolute Error*), dado por

$$IAE = \sum_{i=0}^N |e(i)|,$$

em que N é o número total de amostras da simulação e e o erro entre a referência e a saída do processo.

Os controladores PI são projetados conforme a lei de controle do PI discreto com integração trapezoidal, dada por

$$u(n) = K_p e(k) + \frac{K_p T_s}{T_i} \left[\frac{e(0) + e(n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} e(i) \right],$$

em que T_s é o tempo de amostragem. Usa-se o IMC (*Internal Model Control*) para a sintonia dos controladores PI.

8.2.1 Aplicação de controle ao modelo de espessador cilíndrico sujeito à adição de floculante

Em Pereira *et al.* (2020), implementa-se o controlador DMC MIMO realizando-se a identificação do sistema MIMO por meio do método da curva de reação entorno dos respectivos pontos de operação para a densidade na descarga e a altura da interface. A matriz de funções de transferências obtidas é

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1,969}{19500s+1} & \frac{0,132e^{5,37 \times 10^4 s}}{43762s+1} \\ \frac{-12,005e^{5,87 \times 10^3 s}}{15736s+1} & \frac{2,608}{30792s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}, \quad (8.4)$$

em que as variáveis manipuladas $U_1(s)$ e $U_2(s)$ são a vazão na descarga e a dosagem de floculante, respectivamente. Enquanto as variáveis controladas $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$ são a densidade na descarga e a altura da interface, respectivamente.

Na Tabela 8.1, são apresentados os parâmetros de sintonia do controlador DMC MIMO. Por outro lado, projetou-se os controladores PI em uma estrutura de controle descentralizada utilizando as funções de transferência de primeira ordem da diagonal principal $G_{11}(s)$ e $G_{22}(s)$ apresentadas em (8.4). Ainda, por meio da sintonia IMC, obtiveram-se os parâmetros apresenta-

dos na Tabela 8.2.

Tabela 8.1: Parâmetros de sintonia DMC MIMO.

Parâmetros	$Y_1(s)$	$Y_2(s)$
Horizontes de Predição (p)	9	9
Horizontes de Controle (m)	3	3
Ponderação do Incremento de Controle (R)	5	450
Ponderação do Erro Predito (Q)	1	1
Período de Amostragem (T)	10 s	10 s

Fonte: Pereira *et al.* (2020).

Tabela 8.2: Ganhos do controlador PI.

Ganhos	K_p	T_i	λ
Densidade na descarga	1,5	19500	66023
Nível na interface	0,05	30792	23613

Fonte: Pereira *et al.* (2020).

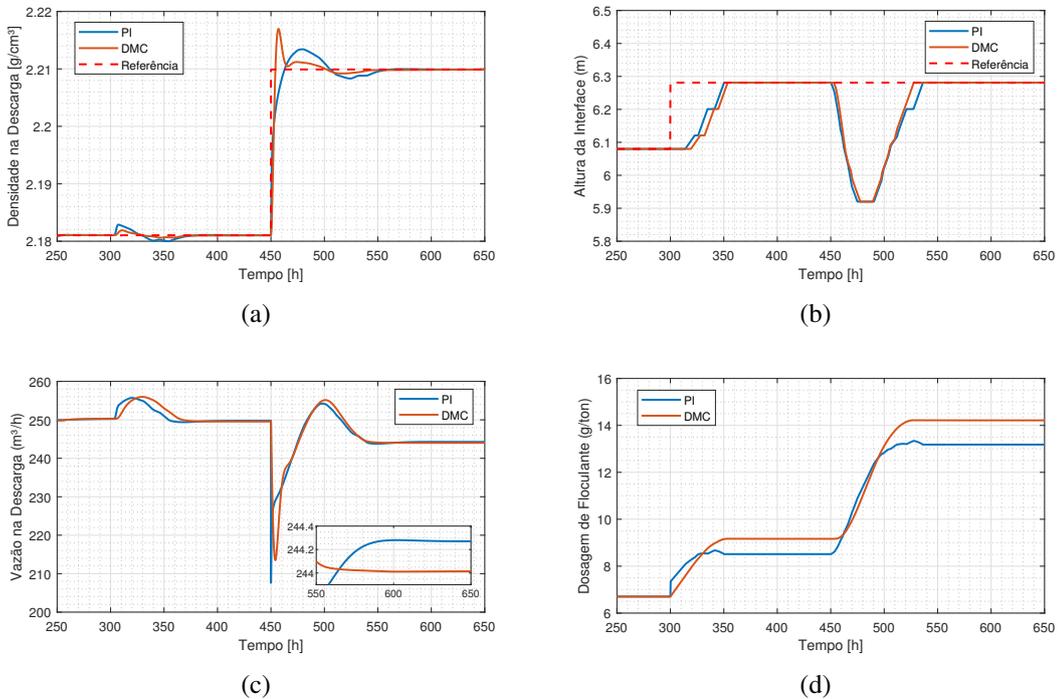


Figura 8.2: Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante.

Fonte: Pereira *et al.* (2020).

Apresenta-se na Figura 8.2 os sinais de saída, densidade no *underflow* e altura da interface, e os sinais de entrada, vazão no *underflow* e dosagem de floculante para um intervalo de simulação de 650 h. São mostrados os sinais de referência e dos controladores DMC MIMO e PI descentralizado.

Em $t = 300$ h, fecha-se a malha de controle com *setpoints* de densidade em $2,18 \text{ g/cm}^3$ e altura da interface em $6,28 \text{ m}$. Os *setpoints* são alcançados sem a presença de sobressinal em ambos os controladores, tendo o controlador PI apresentado um tempo de resposta menor em relação ao DMC MIMO ($50,2 \text{ h}$ contra $53,8 \text{ h}$) na malha de altura da interface.

Num segundo momento ($t = 450 \text{ h}$), altera-se o *setpoint* de densidade na descarga para $2,21 \text{ g/cm}^3$. Nota-se que o controlador DMC atinge o *setpoint* com mais rapidez em relação ao PI. Contudo, o *overshoot* máximo do DMC de $0,007 \text{ g/cm}^3$, ou $0,32\%$, é maior que o *overshoot* de $0,003 \text{ g/cm}^3$ ($0,14\%$) do controlador PI. Ressalta-se ainda a variação na altura da interface devido à mudança de *setpoint* na densidade da descarga.

Na Tabela 8.3 apresenta-se um comparativo de desempenho dos controladores projetados. O DMC projetado apresentou um IAE menor nas duas malhas de controle. Contudo, avaliando-se os controladores do ponto de vista econômico, percebe-se que o PI utiliza menos floculante para atingir o objetivo final. É importante frisar que o comparativo realizado aqui não tem como objetivo apontar a melhor técnica de controle. Tal comparação não pode ser feita, dentre outras razões, pelo fato de que cada controlador utiliza diferentes técnicas de sintonia.

Tabela 8.3: Índice de desempenho IAE para os testes realizados com controladores PI e DMC no modelo de Betancourt *et al.* (2014)

	DMC	PI	Diferença (%)
Densidade na descarga	5,8	8,6	48,3
Nível da interface	2703,0	2775,9	2,7

Fonte: Pereira *et al.* (2020).

8.2.2 Aplicação de Controle ao modelo de espessador cilíndrico-cônico sujeito à adição de floculante

Da mesma maneira que apresentado na seção anterior, projetam-se controladores PI e DMC para o modelo proposto de espessador. Por tratar-se de um novo modelo, atualiza-se, via curva de reação, a matriz de funções de transferência, de modo que a nova matriz é dada por

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2,314}{16857s+1} & \frac{40,815}{10217s+1} \\ \frac{(564,93s-0,00022148)e^{-11,031s}}{9,5911 \times 10^6 s^2 + 6193,9s+1} & \frac{2,0288e^{-30s}}{7110s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Os parâmetros dos controladores DMC e PI são apresentados nas Tabelas 8.4 e 8.5, respectivamente. O controlador DMC continua tendo uma estrutura MIMO, enquanto o controlador PI apresenta estrutura descentralizada, fazendo-se o uso das funções $G_{11}(s)$ e $G_{22}(s)$ da diagonal principal de (8.5).

Tabela 8.4: Parâmetros de sintonia DMC MIMO para o controle do modelo proposto.

Parâmetros	$Y_1(s)$	$Y_2(s)$
Horizontes de Predição (p)	8	8
Horizontes de Controle (m)	5	5
Ponderação do Incremento de Controle (R)	20000	500000
Ponderação do Erro Predito (Q)	0.1	0.1
Período de Amostragem (T)	1680 s	1680 s

Fonte: O autor.

Tabela 8.5: Ganhos do controlador PI para o controle do modelo proposto.

Ganhos	K_p	T_i	λ
Densidade na descarga	0,25	10217	1105,3
Nível na interface	0,035	7110	99984

Fonte: O autor.

Para a demonstração do funcionamento dos controladores projetados, realizam-se as simulações iniciando-se o modelo com o mesmo perfil de densidade, com vazão em $300 \text{ m}^3/\text{h}$, densidade no *underflow* em $2,0375 \text{ g/cm}^3$, altura da interface em $2,16 \text{ m}$ e dosagem de floculante em 10 g/ton . Mantêm-se os parâmetros de entrada constantes nas primeiras 40 horas de simulação, para que seja atingido o regime. A partir daí, faz-se os seguintes testes:

1. Mantém-se o *setpoint* de altura da interface constante e varia-se o *setpoint* de densidade no *underflow* para $2,128 \text{ g/cm}^3$ em $t = 40 \text{ h}$ e $2,073 \text{ g/cm}^3$ em $t = 350 \text{ h}$;
2. Mantém-se o *setpoint* de densidade no *underflow* constante e varia-se o *setpoint* de altura da interface para $2,4 \text{ m}$ em $t = 40 \text{ h}$ e $2,32 \text{ m}$ em $t = 350 \text{ h}$;
3. Varia-se o *setpoint* de densidade no *underflow* para $2,11 \text{ g/cm}^3$ em $t = 40 \text{ h}$ e $2,128 \text{ g/cm}^3$ em $t = 350 \text{ h}$ e varia-se o *setpoint* de altura da interface para $2,0 \text{ m}$ em $t = 40 \text{ h}$ e $2,08 \text{ m}$ em $t = 350 \text{ h}$;
4. Com os *setpoints* de densidade no *underflow* e altura da interface fixados em $2,0375 \text{ g/cm}^3$ e $2,16 \text{ m}$, respectivamente, aplica-se uma perturbação no sistema variando-se a concentração de sólidos da polpa de alimentação de $0,173$ para $0,1743$ em $t = 40 \text{ h}$ e para $0,1718$

em $t = 350 h$ com o intuito de avaliar-se a robustez dos controladores em relação a essa variável.

A partir desses testes, obtêm-se os resultados apresentados nas Figuras 8.3 a 8.6. É notório o comportamento mais agressivo do controlador PI em relação ao DMC em todos os testes realizados. Embora isso seja interessante do ponto de vista de agilidade para atingir o *setpoint* desejado, essa agressividade pode ser prejudicial ao processo, uma vez que são gerados *overshoots* indesejados e desnecessários. No último teste (Figura 8.6), por exemplo, percebe-se a dificuldade enfrentada pelo controlador PI para atingir o *setpoint* desejado, observando-se uma oscilação indesejada e sustentada em torno dos *setpoints*.

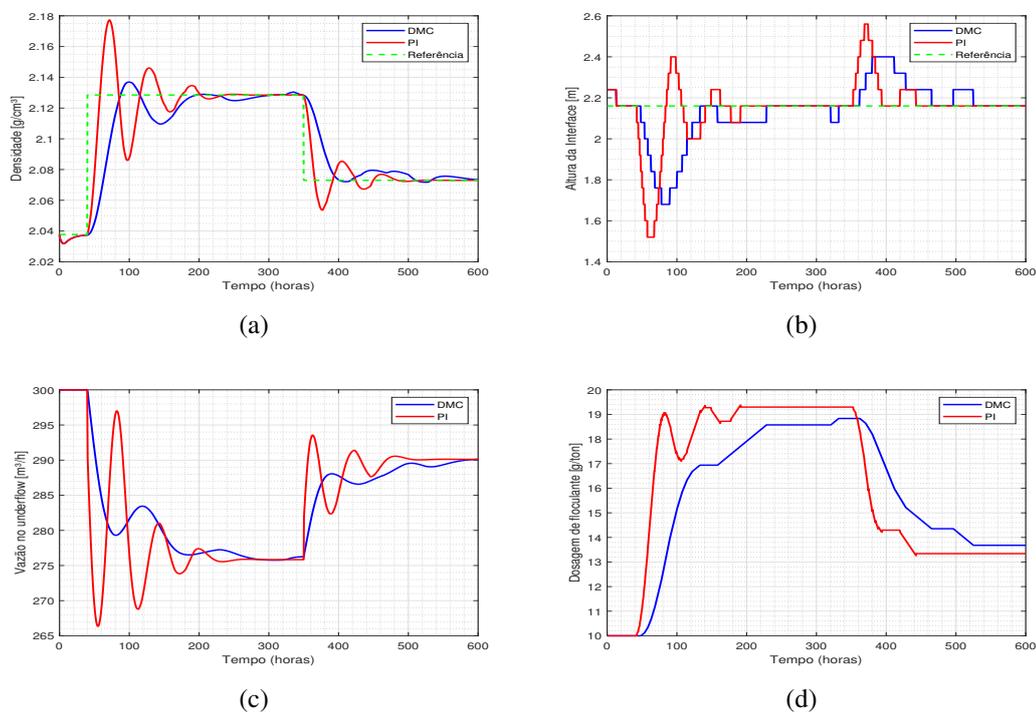


Figura 8.3: Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante, variando-se o *setpoint* de densidade.

Fonte: O autor.

Para complementar a análise dos resultados obtidos nos quatro testes, apresentam-se na Tabela 8.6 os IAE para os dois controladores em cada teste e, na Tabela 8.7, são mostrados os valores médios dos sinais de floculante aplicados ao sistema pelos controladores. Percebe-se que o IAE do controlador PI é menor que do DMC em quase todos os testes. Por outro lado, o controlador PI fez uso de maior quantidade de floculante em todos os testes. Sendo assim, utilizar o controlador DMC projetado representa um ganho econômico para o processo.

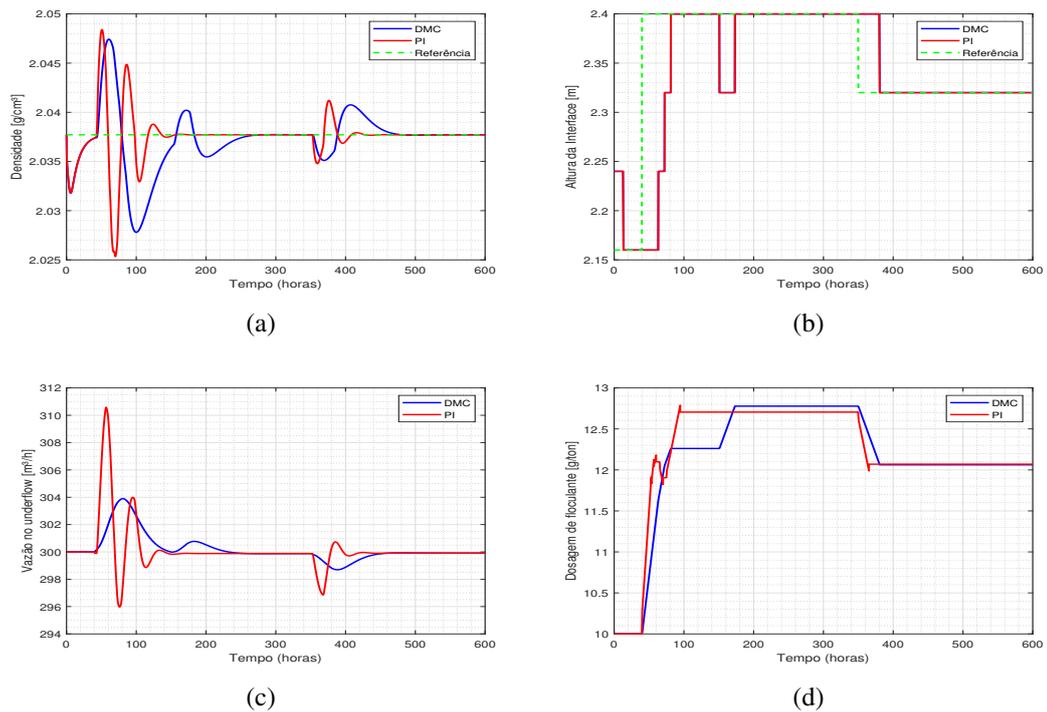


Figura 8.4: Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante, variando-se o *setpoint* de altura da interface.

Fonte: O autor.

Tabela 8.6: Índice de desempenho IAE para os testes realizados com controladores PI e DMC no modelo proposto.

Nº do teste	Variável	DMC	PI
1	Densidade na descarga	568,5	471,4
	Nível da interface	18399	14679
2	Densidade na descarga	100,4	53,4
	Nível da interface	4593	2741
3	Densidade na descarga	453,0	378,0
	Nível da interface	13137	12541
4	Densidade na descarga	169,2	158,2
	Nível da interface	4948	5541

Fonte: O autor.

8.3 Conclusão

Neste capítulo, discutiu-se sobre o Controle por Matriz Dinâmica (DMC), realizando-se a apresentação matemática necessária para a aplicação da técnica no sistema MIMO do espessador. Os controladores DMC projetados são aplicados aos modelos de espessadores de Betancourt *et al.* (2014) e ao modelo proposto. Além disso, realizou-se a comparação dos resultados com controladores PI.

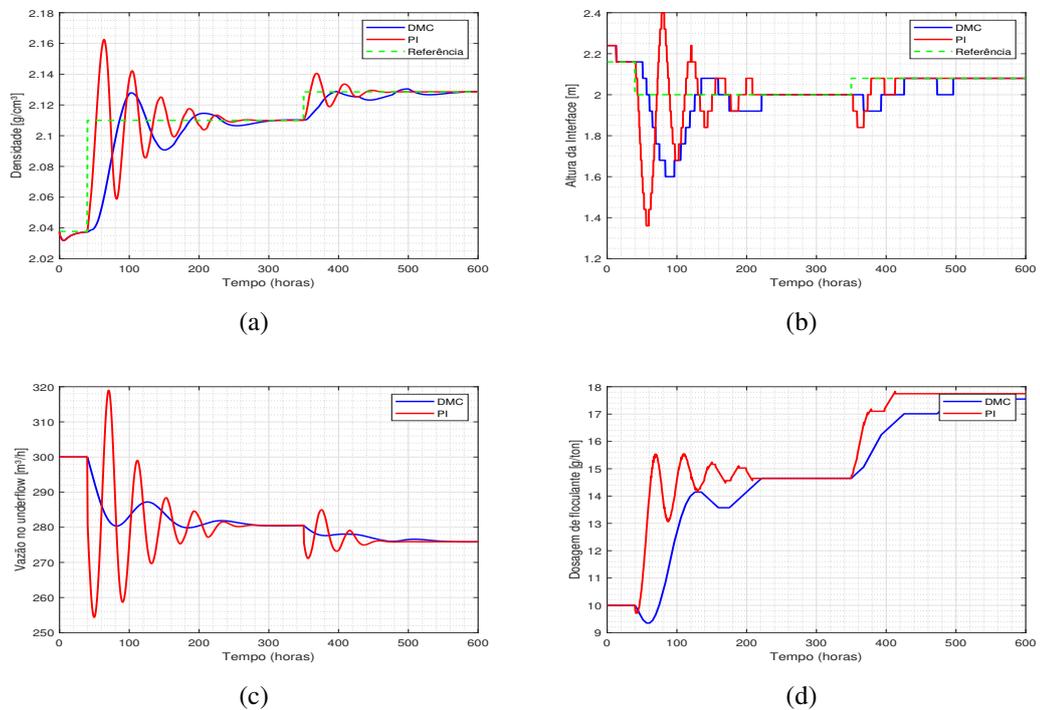


Figura 8.5: Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante, variando-se os *setpoints* de densidade no *underflow* e altura da interface.

Fonte: O autor.

Tabela 8.7: Média de floculante utilizado nas simulações dos controladores PI e DMC.

Nº do teste	DMC (g/ton)	PI (g/ton)
1	15,6	16,0
2	12,1	12,2
3	14,7	15,4
4	9,83	9,89

Fonte: O autor.

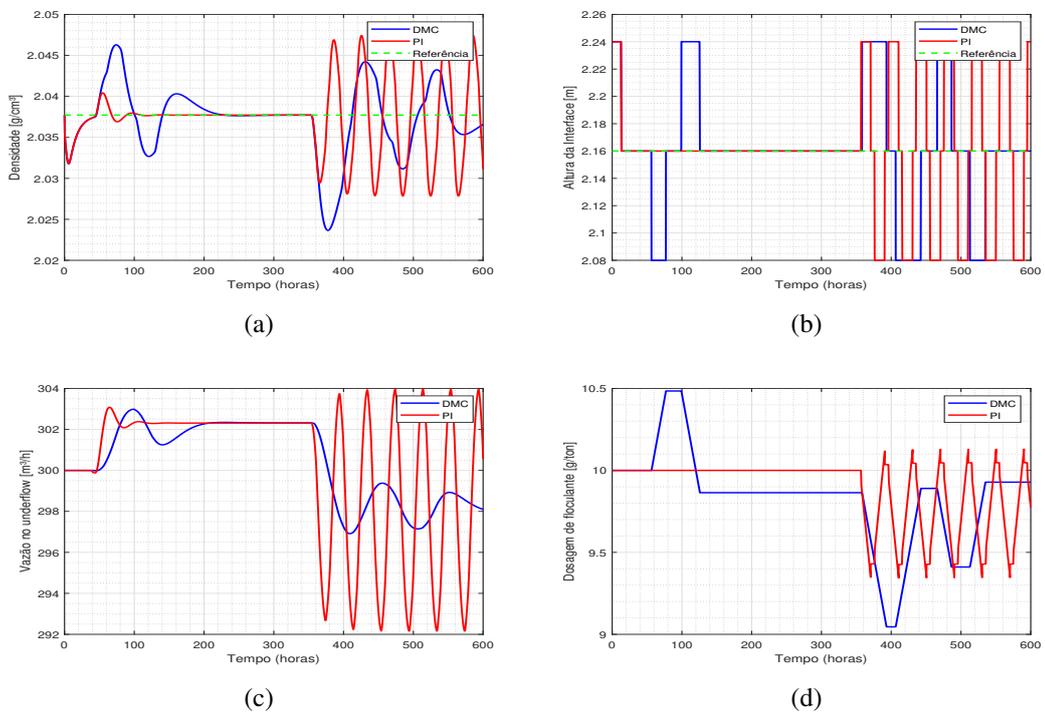


Figura 8.6: Sinais das malhas de controle para (a) densidade na descarga (b) altura da interface (c) vazão na descarga e (d) dosagem de floculante, variando-se a densidade da polpa da alimentação.
 Fonte: O autor.

9 Conclusões

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre técnicas de simulação e controle de espessadores. Para tanto, apresenta-se uma revisão sucinta, mas suficiente para contextualizar o leitor do papel e da importância dos espessadores nas plantas de beneficiamento mineral. Explora-se ainda o processo de adição de floculante e os tipos de espessadores, levando em conta suas formas geométricas e aplicações.

Nesse contexto, apresenta-se os dois dos trabalhos mais atuais e completos em relação à simulação da dinâmica dos espessadores, Betancourt *et al.* (2014) e Bürger *et al.* (2017), apresentam modelos unidimensionais de espessadores que, apesar de originados de uma mesma série de trabalhos, seguem diferentes linhas de desenvolvimento. Enquanto o modelo de Betancourt *et al.* (2014) considera a adição de floculante, viabilizando a aplicação de controladores para essa variável, o trabalho desenvolvido em Bürger *et al.* (2017) corrige uma limitação crônica dos trabalhos similares, que é a consideração de uma representação mais fidedigna da geometria real dos espessadores, porém sem atender-se para a influência da dinâmica do floculante adicionado.

De forma a unificar as duas abordagens em um mesmo arcabouço, este trabalho propôs, portanto, um modelo de espessador cilíndrico-cônico sujeito à adição de floculante validado com dados de operação reais de um espessador de minério de ferro. O modelo matemático é dado por equações diferenciais parciais para a concentração de sólidos ao longo do espessador, considerando-se o efeito da adição de floculante à alimentação e também a variação da área da seção transversal. Como mostrado, com esse modelo é possível simular o efeito da variação da vazão da descarga e da dosagem de floculante na concentração e na altura da interface.

Assim, motivando-se no fato de que controlar a altura da interface pode representar a redução da turbidez da água sobrenadante e que o floculante é comumente usado com esse fim na indústria, aplicam-se controladores para a altura da interface a partir da dosagem de floculante adicionada à alimentação do espessador. Assim como em diversos trabalhos, controla-se também a concentração de sólidos na descarga.

Por se tratar de um sistema multivariável, optou-se pela utilização do controle DMC MIMO. Por ser amplamente utilizado na indústria, esse controlador é uma boa escolha como estratégia de controle para espessadores. Para fins de comparação, é implementado um controlador PI descentralizado. A aplicação dos controladores evidencia diversas vantagens em detrimento de controles manuais, como a economia de uso de floculante e a adaptabilidade do controlador a variações no sistema.

Devido à sua completude, conclui-se que pode-se utilizar o modelo de espessador desenvolvido neste trabalho como facilitador para o projeto de controladores para espessadores em operação em plantas de beneficiamento mineral.

9.1 Propostas de Trabalhos Futuros

A partir da dissertação desenvolvida, sugere-se como trabalhos futuros os seguintes itens:

- Validação mais robusta do modelo desenvolvido, a partir da obtenção de mais dados de operação de espessadores reais em usinas de tratamento de minérios e/ou o desenvolvimento de ensaios em réplicas de espessadores reais em laboratório. Estudos e investimentos em instrumentação adequada ao processo também são necessidades emergentes.
- Sugere-se o aprimoramento do modelo de espessador desenvolvido, por meio da adição do termo responsável pela representação da dispersibilidade e também a adição do efeito causado pelo *rake*.
- Aplicar ao processo controladores robustos aos distúrbios na alimentação. Outra técnica sugerida é o Controle por Busca Extremal (*Extremum Seeking Control*).
- É pertinente, ainda, trabalhar na aplicação da técnica de controle DMC em plantas reais de espessadores usando o modelo desenvolvido neste trabalho como base para esse objetivo.

9.2 Publicação

Durante o período de desenvolvimento desta dissertação de mestrado, o seguinte trabalho foi publicado:

- PEREIRA, A. M., MARTINS, W. T., MOREIRA, V. S., et al.. “Aplicação de Controle PI e DMC Multivariável em Espessadores de Minério de Ferro”. Em: Congresso Brasileiro de Automática-CBA, v. 2, 2020.

Referências Bibliográficas

- ADAMS, M. D. *Gold ore processing: project development and operations*, v. 15. Elsevier, 2016.
- BECKER, R. “Espesamiento continuo, diseño y simulación de espesadores”, **Habilitación Profesional, Universidad de Concepción, Chile**, 1982.
- BETANCOURT, F., BÜRGER, R., DIEHL, S., et al.. “Modeling and controlling clarifier–thickeners fed by suspensions with time-dependent properties”, **Minerals Engineering**, v. 62, pp. 91–101, 2014.
- BÜRGER, R., NARVÁEZ, A. “Steady-state, control, and capacity calculations for flocculated suspensions in clarifier–thickeners”, **International Journal of Mineral Processing**, v. 84, n. 1-4, pp. 274–298, 2007.
- BÜRGER, R., KARLSEN, K. H., TOWERS, J. D. “A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units”, **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 65, n. 3, pp. 882–940, 2005.
- BÜRGER, R., DIEHL, S., NOPENS, I. “A consistent modelling methodology for secondary settling tanks in wastewater treatment”, **Water research**, v. 45, n. 6, pp. 2247–2260, 2011.
- BÜRGER, R., RUIZ-BAIER, R., TORRES, H. “A stabilized finite volume element formulation for sedimentation-consolidation processes”, **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 34, n. 3, pp. B265–B289, 2012.
- BÜRGER, R., DIEHL, S., FARÅS, S., et al.. “A consistent modelling methodology for secondary settling tanks: a reliable numerical method”, **Water Science and Technology**, v. 68, n. 1, pp. 192–208, 2013.
- BÜRGER, R., CAREAGA, J., DIEHL, S. “A simulation model for settling tanks with varying cross-sectional area”, **Chemical Engineering Communications**, v. 204, n. 11, pp. 1270–1281, 2017.
- CAMACHO, E. F., ALBA, C. B. **Model predictive control**. Springer science & business media, 2013.

- CONCHA, F. **Solid-liquid separation in the mining industry**. Springer, 2014.
- CUTLER, C. R., RAMAKER, B. L. “Dynamic matrix control?? A computer control algorithm”. Em: **joint automatic control conference**, n. 17, p. 72, 1980.
- DE ALMEIDA, S., EUZÉBIO, T. A. M. “Controle DMC Adaptativo Aplicado do Processo de Espessamento Contínuo”. Em: **Congresso Brasileiro de Automática-CBA**, v. 1, 2019.
- DIEHL, S. “Numerical identification of constitutive functions in scalar nonlinear convection–diffusion equations with application to batch sedimentation”, **Applied Numerical Mathematics**, v. 95, pp. 154–172, 2015.
- HOGG, R. “Flocculation and dewatering”, **International Journal of Mineral Processing**, v. 58, n. 1-4, pp. 223–236, 2000.
- HOGG, R. “Bridging flocculation by polymers”, **KONA Powder and Particle Journal**, v. 30, pp. 3–14, 2013.
- KING, R. P. **Modeling and simulation of mineral processing systems**. Elsevier, 2012.
- KYNCH, G. J. “A theory of sedimentation”, **Transactions of the Faraday society**, v. 48, pp. 166–176, 1952.
- LUZ, A. D., SAMPAIO, J., FRANÇA, S., et al.. “**Tratamento de Minérios–5ª edição**”, *Rio de Janeiro: CETEM/MCT*, 2010.
- LUZ, A. B. D., LINS, F. A. F. “**Introdução ao tratamento de minérios**”. CETEM/MCTIC, 2018.
- METSO CORPORATION. “Basics in Minerals Processing”. 2018.
- PEREIRA, A. M., MARTINS, W. T., MOREIRA, V. S., et al.. “Aplicação de Controle PI e DMC Multivariável em Espessadores de Minério de Ferro”. Em: **Congresso Brasileiro de Automática-CBA**, v. 2, 2020.
- RICHARDSON, J. “u. WN Zaki: Sedimentation and fluidization”, **Trans. Instn. chem. Engrs. Bd**, v. 32, pp. 35, 1954.
- SALTER, J., WYATT, N. “Sorting in the minerals industry: past, present and future”, **Minerals Engineering**, v. 4, n. 7-11, pp. 779–796, 1991.
- SAMSTAG, R. W., DUCOSTE, J. J., GRIBORIO, A., et al.. “CFD for wastewater treatment: an overview”, **Water Science and Technology**, v. 74, n. 3, pp. 549–563, 2016.

- SILVERBLATT, C. E., EASTON, J. H. “Characterization of process objectives and (general) approach to equipment selection”, **Mineral processing plant design practice and control**, pp. 1255–1261, 2002.
- TAN, C. K., BAO, J., BICKERT, G. “A study on model predictive control in paste thickeners with rake torque constraint”, **Minerals Engineering**, v. 105, pp. 52–62, 2017.
- WANG, Z., BOVIK, A. C. “Mean squared error: Love it or leave it? A new look at signal fidelity measures”, **IEEE signal processing magazine**, v. 26, n. 1, pp. 98–117, 2009.
- WILLS, B. A., FINCH, J. *Wills’ mineral processing technology: an introduction to the practical aspects of ore treatment and mineral recovery*. Butterworth-Heinemann, 2015.