



VALE

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS ASSOCIAÇÃO INSTITUTO TECNOLÓGICO VALE Programa de Pós-Graduação em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração – PROFICAM

VINÍCIUS DA SILVA MOREIRA

# CONTROLE PREDITIVO APLICADO AO MODELO NÃO LINEAR DE BRITADOR CÔNICO

OURO PRETO-MG 2018

# VINÍCIUS DA SILVA MOREIRA

# CONTROLE PREDITIVO APLICADO AO MODELO NÃO LINEAR DE BRITADOR CÔNICO

Projeto de Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração da Universidade Federal de Ouro Preto e do Instituto Tecnológico Vale, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Controle e Automação.

Orientador: Dr. Thiago Antonio Melo Euzébio

OURO PRETO-MG 2018 Mestrado Profissional em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração - PROFICAM

Controle Preditivo Aplicado ao Modelo não Linear de Britador Cônico

Vinícius da Silva Moreira

Dissertação defendida e aprovada em 23 de abril de 2018 pela banca examinadora constituída pelos professores:

D.Sc. Thiago Antonio Melo Euzébio Orientador – Instituto Tecnológico Vale (ITV)

D.Sc. Paulo Marcos de Barros Monteiro Membro interno – Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

D.Śc. Agnaldo José da Rocha Reis Membro interno – Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Ph.D. Daniel Gerenímo Sbarbaro Hofer Membro externo – Universidad Concepción

#### M838c

Moreira, Vinicius da Silva.

Controle preditivo aplicado ao modelo não linear de britador cônico [manuscrito] / Vinicius da Silva Moreira. - 2018. 59f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Antonio Melo Euzébio.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia de Controle e Automação e Técnicas Fundamentais. Programa de Pós Graduação em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração.

Área de Concentração: Engenharia de Controle e Automação de Processos Minerais.

1. Controle Preditivo por Modelo. 2. Proporcional-Integral. 3. Abertura na Posição Fechada. 4. Britador cônico. I. Euzébio, Thiago Antonio Melo. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 681.5:622.2

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

Acima de tudo, agradeço a Deus por mais esta realização.

Dedico à minha família Moreira por me conduzir no caminho da busca incessante por aprendizado, em especial ao meu pai, Raimundo Alves Moreira, que infelizmente não mais está presente fisicamente entre nós, mas estará sempre em nossas memórias e corações. Em especial também à minha mãe, Raimunda da Silva Moreira, que além de professora por formação é professora no que tange à boa criação de seus filhos, todos Mestres a partir desde momento. Dedico ainda ao meu orientador, Thiago Euzébio, ao meu gerente na Vale, Pablo Mendes e ao Khalid Atta pelo apoio.

# **RESUMO**

Plantas de britagem cônica são amplamente utilizadas em mineração, podendo ter função de adequação granulométrica às operações unitárias subsequentes ou adequar a granulometria de produtos em processos ditos a seco, quando da ausência de utilização de água. Geralmente são instalados vários equipamentos em paralelo de forma a absorver variações granulométricas do material alimentado na planta e não restringir sua capacidade. Dada a importância dos britadores cônicos no processo este projeto visa avaliar a utilização de simulador de britador cônico durante desenvolvimento de controladores para plantas de britagem. Primeiramente se avalia a capacidade do simulador em reproduzir as condições reais de britadores e em seguida é desenvolvido um Controlador Preditivo por Modelo (MPC) que fará a regulagem da abertura da câmara de britagem. Realizou-se ainda a implementação de um controle Proporcional-Integral (PI) para comparação. Perturbações foram adicionadas ao processo e avaliada a resposta dos controladores, tanto no que tange ao atingimento do set point dentro de parâmetros de performance quanto na própria ação de controle, a qual deve respeitar os limites mínimo e máximo do atuador. Tais perturbações representam mudanças no ponto de operação, início do processamento de minério mais grosso e resistente e desgaste do revestimento dos britadores. Sendo assim ambos os controladores (MPC e PI) foram capazes de corrigir o valor da variável de saída quando adicionadas as perturbações mencionadas anteriormente.

**Palavras-chave:** Controle Preditivo por Modelo, Proporcional-Integral, abertura na posição fechada, britador cônico.

# ABSTRACT

Cone crushing plants are widely used in mining when their function is to suit the granulometric of the material to the subsequent unit operations or to adapt the products granulometric in dry processes. Several types of equipment are installed in parallel in order to absorb granulometric variations of the material fed in the plant and not to restrict the capacity of the plant. Given its importance in the process, this project aims to evaluate the use of a cone crusher simulator during the development of controllers for crushing plants. Firstly, the simulator's ability to reproduce the actual crushing conditions is evaluated, and then a Model Predictive Controller (MPC) is developed that will regulate the close side settling. A Proportional-Integral (PI) controller was also implemented for comparison. Disturbances were added to the process and the controllers' response was evaluated, both for reaching the *set point* within performance parameters and in the control action itself, which must respect restrictions imposed by the actuator. The disturbance imposed to the process were: changes in the operating point and the kind of material fed in the plant and coating wear. Thus, both controllers (MPC and PI) were able to correct the value of the output variable when the previously mentioned perturbations were added. Although the PI controller proves viable for the application presented in this study, it would not be applicable for the future application, which would be inserted in a multivariate scenario with restrictions. In contrast, the MPC controllers applies to both scenarios.

Key words: Model Predictive Control, close side settling, cone crusher.

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Amostragem da alimentação (A) e britado em 35mm (B), 38mm (C) e 41mm (D).	12
Figura 2: Granulometria do material britador para diferentes aberturas	12
Figura 3: Capacidade do britador para diferentes aberturas	13
Figura 4: Britadores que utilizam o impacto como mecanismo de quebra (Metso, Basics in	
Mineral Processing, 2015)	15
Figura 5: Mecanismo de quebra utilizado por britadores cônicos (King, 2001)	16
Figura 6: Curva granulométrica de produtos de britagem, variando a velocidade do excêntric	O
(Atta, 2010)	17
Figura 7: Britador cônico (Metso, Manual de Instruções, 2011).	17
Figura 8: Fluxograma típico de planta de agregado (Asbjornsson G., 2013)	18
Figura 9: Planta de britagem de mineração de ferro (Serra Leste, Vale SA)	18
Figura 10: Localização da mina de Serra Leste	19
Figura 11: Fluxograma da Usina de Serra Leste.	20
Figura 12: Geometria da câmara de britagem dos britadores secundário de Serra Leste	21
Figura 13: Tipos de quebras (King, 2001)	24
Figura 14: Representação do modelo de (Whiten, 1972)	24
Figura 15: Modelagem DEM utilizando BPM (Quist, 2012).	25
Figura 16: Modelagem DEM utilizando PBM (Lichter, Lim, Potapov, & Kaja, 2009)	26
Figura 17: CPM para a velocidade do excêntrico e APF. (Atta, 2010)	27
Figura 18: Variáveis geométricas do britador (Atta, 2010)	28
Figura 19: Modelo dinâmico da zona i simplificado (Atta, 2010).	28
<b>Figura 20:</b> Modelo dinâmico da zona i com os fatores $\alpha \in \beta$ (Atta, 2010)	29
Figura 21: Modelo dinâmico da zona i detalhado (Atta, 2010).	31
Figura 22: Estratégia MPC (Euzébio, 2010).	35
Figura 23: Coeficientes do Modelo de Convolução	36
Figura 24: Planta de britagem adotada para a avaliação do modelo	42
Figura 25: Granulometria da alimentação do britador, material A e B	43
Figura 26: Eficiência de britagem com variação da APF	44
Figura 27: Razão para cenários de variação da APF	44
Figura 28: Produtividade para cenários de variação da APF	45
Figura 29: Curvas granulométricas para a alimentação de material britado (Material A)	45
Figura 30: Curvas granulométricas para a alimentação de material britado (Material B)	46
Figura 31: Razão x APF x Tipo de material.	46
Figura 32: Taxa de alimentação x APF x Tipo de material	47
Figura 33: Resposta ao degrau	48
Figura 34: Determinação dos parâmetros de forma gráfica	49
Figura 35: Resposta ao degrau para sistema de alta ordem e primeira ordem	50
Figura 36: Resposta ao degrau para a razão utilizando controlador MPC e PI	51
Figura 37: Resposta à alteração da granulometria da alimentação do britador	52
Figura 38: Resposta ao desgaste dos revestimentos do britador	53

# LISTA DE ABREVIATURAS

- APF Abertura na Posição Fechada
- CLP Controlador Lógico Programável
- MPC Model Predictive Control
- SISO Single Input Single Output
- MIMO Multiple Input Multiple Output
- **OPC** OLE Process Control
- **ROM** Run of Mine
- HC Hematita Compacta
- HF Hematita Friável
- **ESC** *Extremum Seeking Control*
- **DEM** *Discrete Element Method*
- **PBM** Particle Balance Model
- **PI** Proporcional-Integral
- **BPM** Balance Population Model
- **CPM** Crushing Performance Method

# SUMÁRIO

1. IN	TRODUÇÃO	10
1.1.	Contexto	10
1.2.	Motivação	11
1.3.	Objetivos da pesquisa	13
1.4.	Perguntas Sobre a Pesquisa	13
1.5.	Organização do Texto	14
2. CI	IRCUITOS DE BRITAGEM	15
2.1.	Introdução	15
2.2.	Usina de Serra Leste	19
3. M	ODELAGEM E SIMULAÇÃO DE BRITADORES CÔNICOS	22
3.1.	Introdução	22
3.2.	Revisão Bibliográfica	23
3.3.	O Modelo de Britagem Desenvolvido por Khalid T. Atta	27
4. Co	ONTROLADOR PREDITIVO POR MODELO	34
4.1.	Introdução	34
4.2.	Controle Preditivo por Modelo (MPC)	34
4.2	2.1. Controle por Matriz Dinâmica sem restrições – DMC	36
4.2	2.1.1. Modelo de Convolução	36
4.2	2.1.2. Predição	37
4.2	2.1.3. Algoritmo de Controle	39
4.2	2.1.4. Sintonia de Controladores DMC	41
5. RI	ESULTADOS SIMULADOS	42
5.1.	Avaliação do Modelo de Simulador de Britador Cônico de (Atta, 2010)	42
5.2.	Desenvolvimento dos Controladores	47
5.2	2.1. Controle Preditivo por Modelo (MPC)	48
5.2	2.2. Proporcional-Integral (PI)	48
5.3.	Resultados	51
6. CO	ONCLUSÃO	54
7. TI	RABALHOS FUTUROS	56

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Contexto

Britadores cônicos são amplamente usados em indústria de agregados e mineração. Estes equipamentos possuem alta confiabilidade mecânica e alta eficiência quando comparado a outros equipamentos que visam cominuir o material alimentado. Segundo Berman, Munro, & Evertsson (2011) a eficiência de quebra de britadores cônicos varia entre 60 e 80%, enquanto que moinhos do tipo autógenos e semi-autógenos variam entre 20 e 40%. Estes últimos são utilizados para fragmentações mais finas, onde os britadores cônicos possuem baixa eficiência.

Sendo assim, os britadores cônicos são utilizados para britagens secundárias, terciárias e quaternárias, visto a granulometria do material alimentado ser maior. Os circuitos secundários e terciários de britagem geralmente operam em circuito fechado com peneiramento, onde o material grosso, maior que a malha, é direcionado ao britador e o material britado retorna para a peneira, de forma a garantir que somente o minério menor que a malha seja direcionado para as operações unitárias subsequentes.

A relação entre massa de minério que retorna ao britador e a alimentação nova da peneira é chamada de carga circulante. Quanto maior esta massa, menor a produtividade da usina, visto que a área de peneiramento é ocupada por material circulante, restringindo a entrada de nova alimentação vinda da mina. Sendo assim deve-se reduzir a carga circulante para que seja possível aumentar a produtividade da planta.

Desenvolver um controlador que permita a variação dinâmica da abertura na posição fechada (APF) dos britadores secundários permitiria reduzir a vazão mássica da carga circulante, dado o aumento da eficiência de britagem conciliada com a produtividade necessária. Sendo assim este projeto trata da avaliação da capacidade do modelo desenvolvido por Atta (2010) de simular plantas de britagem e de ser utilizado para desenvolvimento de controladores. Este simulador foi desenvolvido a partir da otimização do modelo de Whiten (1972) para britadores cônicos, acrescentando ao modelo o conceito de divisão do perfil vertical da câmara de britagem em zonas, sendo a alimentação da zona superior a própria alimentação do britador, a descarga de uma zona é a alimentação da zona ligeiramente inferior, até a última zona, a qual sua descarga representa a descarga do britador. Permite ainda utilizar tipos de minério diferentes na alimentação do britador, o qual tratará de forma isolada os parâmetros relativos a resistência mecânica e volume ocupado por cada material na câmara de britagem.

Para avaliação do simulador foram construídos cenários de aplicações de perturbações na planta, como variação da abertura da câmara de britagem, mudança de tipo do minério alimentado, assim como de sua granulometria. A planta utilizada nesta avaliação se trata de um britador cônico que descarrega em uma peneira em circuito aberto, sendo o material retido (*oversize*) um produto mais grosso e o passante (*undersize*) um produto mais fino. Foram avaliados os impactos destas modificações nas variáveis granulometria do material britado e taxa de alimentação do britador, que para a planta utilizada se trata da produtividade de toda a planta.

Realizou-se ainda a comparação entre os resultados obtidos (granulometria de produtividade) utilizando um controlador preditivo por modelo (MPC) e um controlador Proporcional-Integral (PI). Em ambos os casos a variável controlada é a abertura do britador e variável manipulada é a razão entre o *oversize* e a alimentação da peneira. Para a planta em questão a razão é determinada conforme necessidade de aumento de produção do produto mais grosso ou mais fino, sendo consequência tanto do valor agregado de cada material quanto da demanda do mercado por cada um deles.

#### 1.2. Motivação

Devido ao desgaste dos revestimentos dos britadores periodicamente é realizada a aferição da abertura. Este processo é realizado manualmente por meio do acionamento da botoeira do motor que regula a abertura câmara de britagem e checagem utilizando-se de um gabarito introduzido na câmara do britador. Alterações na APF também são realizadas em momentos em que a granulometria da alimentação da britagem secundária está anormalmente grossa (quando há desgaste excessivo dos revestimentos do britador primário ou problemas com a malha da grelha vibratória), provocando aumento da corrente dos motores dos britadores secundários para além da corrente nominal, alarmando os sistemas de proteção. Neste caso aumenta-se a APF visando o alívio dos esforços realizado pelo britador, provocando redução da corrente. Porém esta ação causa redução da eficiência de britagem e consequentemente aumento da granulometria do material britado e carga circulante.

A APF é diretamente proporcional à eficiência de britagem. Quanto mais fechado está o britador, mais as partículas são cominuídas, reduzindo-se o percentual de material que será retido nas peneiras subsequentes. Porém, este parâmetro é inversamente proporcional à capacidade do britador, uma vez que reduz a abertura de passagem do material. De forma a verificar na prática se estas afirmações estão corretas, realizou-se amostragem exploratória na planta de Serra Leste, onde

realizou-se aferição do britador em três aberturas distintas (35mm, 38mm e 41mm), amostrando o material britado em seguida. A alimentação do britador também foi amostrada. A Figura 1 mostra os fluxos amostrados.



Figura 1: Amostragem da alimentação (A) e britado em 35mm (B), 38mm (C) e 41mm (D).

As amostras foram encaminhadas ao laboratório para realização de análise química e granulométrica. O resultado da granulometria é apresentado na Figura 2, onde se mostra que quanto menor a APF mais fino será o material da descarga do britador.



Figura 2: Granulometria do material britador para diferentes aberturas.

Na Figura 3 mostra-se que quanto menor a APF menor será a capacidade de processamento do britador. Porém a curva não se mostra linear, sendo a capacidade para abertura em 38mm muito próxima à capacidade para abertura em 41mm. Tal linearidade somente poderia ter sido detectada através de amostragens como a realizada, onde tais dados entrariam na calibração de simuladores.



Figura 3: Capacidade do britador para diferentes aberturas.

Dessa forma, como os resultados em campo corroboraram com a expectativa, o que mostra que é possível desenvolver controladores para a granulometria de produtividade tendo a APF como variável manipulada.

Sendo assim a automatização da aferição do britador é necessária tanto para correção do desgaste dos revestimentos quanto para adequação à necessidade da planta, como priorização da produtividade em detrimento da granulometria e vice e versa. Assim a planta estaria constantemente trabalhando dentro dos parâmetros pré-determinados.

# 1.3. Objetivos da pesquisa

Avaliar se modelos simulados de britadores cônicos são aplicáveis para reproduzir o comportamento de uma planta real, bem como avaliar sua aplicabilidade no projeto de controladores. Deseja-se ainda realizar comparação entre os resultados obtidos quando se utiliza um controlador MPC e PI (Proporcional-Integral). Estes controladores foram desenvolvidos para regular a APF de forma a manter a razão de minério granulado conforme valores pré-determinados (*set point*).

# 1.4. Perguntas Sobre a Pesquisa

Esta pesquisa buscou ao longo do texto responder às seguintes questões:

- a) O modelo simulado de britador cônico utilizado reproduz variações na granulometria e produtividade conforme o resultado da análise exploratória realizada na planta de Serra Leste?
- b) Ajuste dinâmico da APF é capaz de aumentar ou reduzir a produção de minério grosso conforme necessidade?
- c) Os controladores MPC e PI são capazes de realizar o fechamento do britador na proporção do desgaste dos revestimentos?
- d) Há vantagens quando se utiliza controlador MPC ao invés de controladores PI para esta aplicação?
- e) O modelo se mostra viável para desenvolvimento de sistemas de controle?

# 1.5. Organização do Texto

Este trabalho se inicia com uma abordagem introdutória de circuitos de britagem no Capítulo 1, seu funcionamento e variáveis que afetam a eficiência do equipamento (Capítulo 2). O Capítulo 3 é dedicado à modelagem e simulação de britadores cônicos, onde alguns tipos de modelos são apresentados, em especial aquele adotado para este estudo. O Capítulo 4 trata do controlador adotado para este trabalho, o Controlador Preditivo por Modelo. Finalmente, a avaliação do simulador é realizada no capítulo 5, assim com apresenta os resultados comparativos dos controladores MPC e PI.

#### 2. CIRCUITOS DE BRITAGEM

#### 2.1. Introdução

Os britadores cônicos são equipamentos que visam a redução da granulometria do material, o que é atingido após esforços de compressão entre a parte móvel e a fixa, chamadas de manto e bojo, respectivamente. Estes britadores são amplamente aplicados em estágios secundários, terciários e quaternários. A Figura 4 mostra os tipos de britadores que utilizam o impacto como mecanismo de quebra, correlacionando com a granulometria do minério de entrada. Pode-se observar que os britadores cônicos são utilizados tanto para aplicações mais grossas quanto médias. Em processos que envolvem concentração, onde há necessidade da liberação dos minerais de interesse, utilizam-se britadores para adequação granulométrica para entrada em moinhos, os quais se encarregarão de liberar os minerais (Asbjornsson G. , 2013).



Figura 4: Britadores que utilizam o impacto como mecanismo de quebra (Metso, 2015).

A parte móvel, chamada de manto, realiza um movimento rotacional excêntrico em torno de um ponto, chamado de pivô. Dessa forma quando o manto se aproxima do bojo, parte fixa, em certo ponto da circunferência do britador, a quebra das partículas é realizada na forma de esmagamento e cisalhamento. No lado oposto o manto está distante do bojo, permitindo a passagem das partículas que possuírem tamanho inferior a abertura do britador. A Figura 5 mostra este mecanismo de quebra das rochas.



Figura 5: Mecanismo de quebra utilizado por britadores cônicos (King, 2001).

Visando garantir que o minério estará abaixo da granulometria máxima admitida para o processo, os britadores geralmente trabalham em circuito fechado com peneiramento, sendo a malha da peneira muito próxima a abertura do britador. Neste caso haverá o que se chama de carga circulante, parcela do minério que fica retido na tela e retorna ao britador. Em circuitos abertos isto não necessária mente ocorre, onde o que determina a malha da peneira é a granulometria do *undersize* somente.

Dentre as variáveis que influenciam na eficiência do britador estão: variáveis de projeto do britador, relativas às características do minério, variáveis operacionais, limites do equipamento e interações com outros equipamentos (Berman, Munro, & Evertsson, 2011). O ponto de pivô, a excentricidade, o ângulo e o tipo de revestimento utilizado são algumas variáveis de projeto do equipamento. Como variáveis de operação tem-se a abertura na posição fechada (APF) e a velocidade do excêntrico. Os pesquisadores Hulthen e Evertsson (2008) evidenciaram graficamente na Figura 6 que quanto maior a velocidade do excêntrico, mais fino será o material britado.



Figura 6: Curva granulométrica de produtos de britagem, variando a velocidade do excêntrico (*Atta, 2010*).

Na Figura 7 é mostrada a APF do britador (item 4), zona entre o manto e o bojo, região de saída do minério britado. Esta é a mais conhecida variável de operação, onde o ajuste pode ser realizado de forma hidráulica ou mecânica, dependendo do tipo de britador. A performance do britador reduz conforme o desgaste do revestimento aumenta, havendo necessidade de parada do equipamento para reajuste da abertura. Para alguns modelos de britador esta parada não é necessária, como os hidrocônicos. Perdas produtivas ocorrem tanto no momento da parada para reajuste quanto, principalmente, quando os revestimentos estão desgastados (Berman, Munro, & Evertsson, 2011).



Figura 7: Britador cônico (Metso, 2011).

Os circuitos de britagem podem ser de forma direta ou inversa, sendo a primeira quando o material alimenta a britagem antes de ser direcionado ao peneiramento, e a segunda o quando o material primeiramente passa por um peneiramento e somente o material retido, os grossos, direcionados à britagem. Na Figura 8 mostra-se uma planta típica de agregado, onde todo o ROM alimenta o britador secundário juntamente com a carga circulante. Há uma grande diferença entre plantas de agregados e plantas de britagem de minerações, onde na primeira o objetivo é atender o mercado consumidor mais exigido em dado momento, onde a geração de finos muitas vezes é tida como um resultado que não agrega valor ao produto. Em minerações, na grande maioria das vezes a britagem visa adequar a granulometria às etapas de moagem.



Figura 8: Fluxograma típico de planta de agregado (Asbjornsson G., 2013).

Na Figura 9 é apresentada uma planta de mineração de minério de ferro, onde o ROM alimenta primeiramente o peneiramento para, em seguida, seu *oversize* alimentar a britagem. Esta é planta de Serra Leste, onde o objetivo da britagem é adequar a granulometria dos produtos.



Figura 9: Planta de britagem de mineração de ferro (Serra Leste, Vale SA).

# 2.2. Usina de Serra Leste

As amostras para análise exploratória das variáveis capacidade e granulometria, quando se realiza variação da APF, foram coletadas na usina de Serra Leste, projeto de minério de ferro pertencente à Vale S.A., localizado no município de Curionópolis, no Pará, a 805 km da capital, Belém (Figura 10). Verificada capacidade do simulador de reproduzir o comportamento real de plantas de britagens, assim como sua aplicação em sistemas de controle, o projeto será implantado nesta usina, a qual é alimentada com minérios com diferentes granulometrias e durezas, circunstância que simulador se compromete a lidar.

O projeto foi iniciado em 2014 e possui capacidade para produção de 6,0Mtpa dos produtos *sinter feed* (mercado externo), granulado NP2 (mercado interno) e NP3 (mercado externo).



Figura 10: Localização da mina de Serra Leste.

O minério é alimentado na usina de caminhões de 35t, basculando diretamente na moega da usina ou na pilha pulmão, que é utilizada somente em caso de parada da usina, sendo alimentado posteriormente. Um alimentador de sapatas, instalado sob a moega alimenta a grelha vibratória, que tem função de escalpe, ou seja, de retirada dos finos (<150mm). O retido nesta grelha é direcionado a um britador de mandíbulas (Metso C140), de forma a reduzir o tamanho dos blocos maiores que 150mm. O fluxo do passante da grelha e a descarga do britador se juntam para alimentar dois silos e posteriormente duas peneiras vibratórias (10'x21'), por meio de alimentadores de correia. Estas peneiras possuem dois *decks*, sendo o primeiro somente de alívio (100mm) e o segundo de classificação (40mm). O retido em ambos os *decks* se direcionam aos silos que alimentam dois britadores cônicos (APF de 38mm, Metso HP400). As descargas destes

equipamentos se juntam com a alimentação nova da usina, alimentando novamente as peneiras primárias, formando a chamada carga circulante. O passante nestas peneiras é direcionado à duas peneiras secundárias de dois *decks* (Metso 8'x32'), sendo o retido do primeiro *deck* o produto NP3 (+6,3mm e -50mm) e o retido do segundo *deck* o produto NP2 (+6,3mm e -25mm), tais fluxos podem ainda ser direcionados à britagem terciária (APF de 25mm, Metso HP400). O passante do segundo *deck* é o produto *sinter feed* (-16mm). O fluxograma de processo da usina é apresentado da Figura 11.



Figura 11: Fluxograma da Usina de Serra Leste.

A função dos britadores cônicos secundários é gerar material menor que a malha da peneira primária (40mm). Estes equipamentos são alimentados por minério que pode chegar a cerca de 200mm de diâmetro. Sendo assim, a relação de redução chega a 1:5. Para atingir esta relação de redução a geometria da câmara de britagem deve ser projetada para admitir partículas grossas, assim como o paralelismo entre o bojo e o manto é menor que em britadores terciários. Isto garante a operação segura do equipamento, pois evita picos de corrente, o que alarmaria os sistemas de proteção do britador, e ainda garante a produtividade necessária. Conforme pode-se observar na

Figura 12: Geometria da câmara de britagem dos britadores secundário de Serra Leste.

Outro fator particular dos britadores secundário é a velocidade de rotação do manto, o qual é menor que britadores terciários. A motivação também é evitar picos de corrente e proteção da carcaça do britador, dado o tamanho dos blocos e consequente maior resistência dos mesmos.

A ideia é que, caso os resultados desta dissertação sejam positivos, o simulador seja expandido para abranger todo o circuito da planta de Serra Leste e assim realizar testes de eficiência de controle projetado neste novo cenário.

21

# 3. MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE BRITADORES CÔNICOS

## 3.1. Introdução

Realizar a modelagem e simulação de equipamentos permite aumentar o conhecimento sobre determinadas variáveis de forma unicamente computacional, não havendo necessidade de aplicação em campo para visualização do resultado. Isto confere aumento de produtividade, redução de custos, evita paradas da planta para realização de testes, entre outros benefícios. Tais simulações podem ser realizadas de forma estática, considerando que a planta trabalha constantemente em regime estacionário, ou de forma mais complexa, pode ser dinâmica, a qual calcula as variáveis a cada instante, independentemente do regime de operação da planta. Tais modelos podem ainda ser utilizados em sistemas de controle, onde o Controlador Lógico Programável (CLP) realiza a escrita e leitura de dados no simulador.

Em geral, na área de Engenharia de Minas, a modelagem e simulação de plantas de beneficiamento é realizada por modelos matemáticos que consideram que a planta está operando em regime. Recentemente o interesse sobre simulações dinâmicas tem aumentado, a exemplo da das aplicações realizadas por (Atta, 2010) e (Asbjornsson & Hulthen, 2012), as quais utilizam o modelo de (Whiten, 1972) como referência, e as realizadas por (Quist, 2012), (Clearly & Sinnott, 2014), (Li & McDowell, 2014) e (Johansson, Quist, Everston, & Hulthén, 2016), que utilizam elementos discretos para simulação do comportamento das partículas ao sofrerem os esforços dentro da câmara de britagem. Simulações estáticas são uteis para uma estimação global da condição de melhor performance, porém a dinâmica de operação de uma planta real muda a cada instante, visto que há distúrbios, paradas de equipamentos, presença de silos, os quais geram um atraso na resposta (Asbjornsson G., 2013).

Ao longo dos anos algumas abordagens a respeito de modelagem e simulação de britadores têm sido desenvolvidas e outras aprimoradas. Uma delas é a utilização de curvas granulométricas empíricas em função a abertura do britador, as quais são amplamente utilizadas em manuais de britagem, como o manual do fabricante Metso (1994). Algumas das abordagens estudas são enunciadas no tópico posterior.

22

#### 3.2. Revisão Bibliográfica

Muitos modelos têm sido desenvolvidos para prever a curva granulométrica e a vazão de britadores em função das variáveis presentes no sistema. Neste tópico reserva-se à descrição de alguns deles.

Os métodos de dimensionamento de britadores utilizados pelo manual do fabricante Metso (1994) mostra que a capacidade do equipamento é função da densidade aparente, *work index*, fator de tamanho da alimentação e densidade, além do volume da câmara de britagem. Dessa forma para cada litologia do minério teremos uma capacidade distinta para o mesmo britador, assim como para eficiência de britagem.

Grande maioria dos modelos se utilizam das funções quebra, seleção e classificação. A função quebra representa uma distribuição granulométrica que é resultado da quebra uma partícula, originando partículas menores que podem ser novamente quebradas, gerando nova população de partículas. Sendo assim, esta função depende principalmente do material a ser britado (Silva, Souza, Figuereido, & Mendes, 2007). A função seleção representa a probabilidade de a partícula ser cominuída. Esta variável depende basicamente das variáveis mecânicas do britador, assim como variáveis operacionais. A função classificação é função da geometria da câmara de britagem, a qual determinará se o material será ou não aprisionado pelo manto.

O modelo de Whiten (1972) foi desenvolvido baseado nos mecanismos de quebras de britadores cônicos, onde a fragmentação pode ocorrer de duas formas: partículas grossas são aprisionadas entre o bojo e manto, originando pequenas quantidades de partículas ainda grandes, as quais também podem sofrer novas quebras; a segunda ocorre no contato entre as partículas menores entre si e com o revestimento (Mormul, et al., 2015), conforme mostra a Figura 13.



Figura 13: Tipos de quebras (*King*, 2001).

A Figura 14 mostra a representação do modelo de Whiten, sendo f, x e p a distribuição granulométrica da alimentação, material no interior do britador e descarga, respectivamente. A variável C é a função classificação e B a função quebra. Esta representação mostra que parte das partículas podem ser descarregadas sem sofrer quebra, a depender do seu tamanho, e parte são classificadas, ou seja, aprisionadas pelo movimento rotacional do manto e são obrigatoriamente quebradas, se mantendo dentro do britador e podendo sofrer novas quebras ou ser descarregadas do britador.



Figura 14: Representação do modelo de (Whiten, 1972).

Aproximações utilizando PBM (*Population Balance Model*) transforma partículas de alimentação em uma nova curva granulométrica de material mais fino após a britagem, enquanto que BPM (*Bonded Particle Model*) representa partículas individuais como um conjunto de micro-partículas. (Li & McDowell, 2014) realizou comparação entre a utilização destes modelos e

concluiu que o modelo BPM replica de forma satisfatória a performance de um britador cônico, podendo gerar um custo computacional maior que o PBM. O modelo BPM é baseado no princípio de que quando o material é exposto a um esforço que excede um valor específico, conseguido através de experimentos para calibração, ele se quebra em uma gama de partículas de tamanhos pré-determinados (Quist, 2012).

Os conceitos dos modelos BPM e PBM têm sido aplicados para desenvolvimento de modelagem tridimensional através de elementos discretos (DEM). Esta técnica tem grande potencial para investigar os comportamentos mecânicos, tanto fluxo quanto quebra de material granular em escala macro e micro, na qual utiliza modelos de ruptura para estudar uma ampla gama de britadores baseados em compressão, de forma a compreender melhor a operação dos mesmos (Clearly & Sinnott, 2014).

O autor (Quist, 2012) desenvolveu um simulador DEM para entender o comportamento da quebra e performance de britadores cônicos em escala industrial. Constatou que há uma grande variação na distribuição granulométrica do material britado ao longo da altura do britador na região de compressão. O que determina esta diferenciação é o perfil do manto e bojo, os quais vão se tornando mais convergentes na região de descarga do material, influenciando também na vazão de minério através do britador. A Figura 15 mostra este modelo, o qual se utilizou do método BPM.



Figura 15: Modelagem DEM utilizando BPM (Quist, 2012).

A exemplo de modelagem DEM utilizando-se o método PBM, (Lichter et al, 2009) realizaram a análise de um modelo da Metso Minerals que foi desenvolvido para permitir a otimização e desenvolvimento de britadores da marca. Em testes realizados chegaram à resultados

em que os erros chegaram a apenas 5%. Na Figura 16 ilustra-se a simulação de britagem utilizando DEM.



Figura 16: Modelagem DEM utilizando PBM (Lichter, Lim, Potapov, & Kaja, 2009)

Uma forma bastante utilizada para expressar os resultados das simulações, independentemente do método adotado, é utilizando-se gráficos que mostram a capacidade produtiva total do britador versus a velocidade do excêntrico e abertura da câmara de britagem (APF). Este gráfico também é feito variando a APF do britador (Figura 17). Pode-se ainda construir um gráfico tridimensional, quando estas duas variáveis são aplicadas juntas para se determinar a capacidade (Atta, 2010).



Figura 17: CPM para a velocidade do excêntrico e APF. (Atta, 2010).

# 3.3. O Modelo de Britagem Desenvolvido por Khalid T. Atta

Este Capítulo é dedicado a apresentação do modelo de britagem desenvolvido por (Atta, 2010) em sua tese de doutorado, visto que o mesmo foi utilizado neste trabalho como sendo a própria planta a qual o controlador atuará, visto sua capacidade de representar o cenário real. O objetivo do modelo é prever a vazão mássica de minério e a distribuição granulométrica do material britado a partir da variação da abertura na posição fechada e da velocidade do excêntrico. Dada à impossibilidade de variação da velocidade do excêntrico para o modelo de britador instalado em Serra Leste, este trabalho adotou como variável manipulada somente a APF, mantendo a velocidade constante.

O autor Atta (2010) se baseou no modelo desenvolvido por Whiten (1972) que assume que as partículas podem ser quebradas ou passarem sem serem cominuídas e aquelas que foram quebradas a chance de serem quebradas novamente ou caírem sem sofrer nova quebra. A estes mecanismos se dá o nome de função classificação e função quebra, sendo a primeira a proporção de partículas que serão aprisionadas pelo movimento rotativo do manto do britador e a função quebra a proporção daquelas classificadas que serão efetivamente cominuídas. A taxa de quebra das partículas, chamada de função seleção, é a frequência dos eventos de quebra, representando a velocidade com que as frações granulométricas desaparecem (Gomes, 2014). Esta última está intimamente relacionada às variáveis geométricas da câmara de britagem.

Neste modelo é introduzido o conceito de divisão da câmara de britagem em zonas horizontais (Figura 18). A distribuição granulométrica do material alimentado na primeira zona é dado de entrada do modelo, sendo a granulometria de saída desta zona a alimentação da zona seguinte, e assim por diante.



Figura 18: Variáveis geométricas do britador (Atta, 2010).

A Figura 19 mostra um diagrama indicando todas as ações, classificação (Ci), seleção (Si) e quebra (Bi) sofrida por cada fração de material em cada zona do britador:



Figura 19: Modelo dinâmico da zona i simplificado (Atta, 2010).

Os vetores Ui, Zi, Xi e Fi, respectivamente se tratam da distribuição granulométrica da alimentação, descarga, material dentro e material retido na Zona i. Dessa forma a alimentação da zona seguinte será a descarga da zona anterior. As ações descritas acima ocorrem a cada ciclo do manto, ou seja, a taxa de repetição destas ações é determinada pela velocidade de rotação do excêntrico. Como esta velocidade geralmente é muito alta o tempo de rotação não é grande o suficiente para dar tempo do material classificado passar e ser deslocado para a zona inferior, podendo sofrer novas ações de quebra e seleção.

A partícula selecionada é aprisionada entre o manto e o bojo, a duração desse aprisionamento é uma fração muito pequena do tempo de ciclo. O tempo restante ( $\eta$ T) a partícula poderá descer para a zona inferior, sendo o fator  $\eta$  a fração do tempo de ciclo. Muitas vezes a velocidade de rotação do manto é alta de tal forma que a distância percorrida pela partícula durante o tempo  $\eta$ T é menor que a largura da zona. Sendo assim parte do material é aprisionado novamente no próximo ciclo, sofrendo as ações de quebra e seleção. Dessa forma o autor acrescentou o fator  $\beta_i$ , o qual é uma relação entre a massa de material que passaram para a zona inferior e a massa de material classificado para passar.

Outro fator adicionado pelo autor é o  $\alpha_i$ , o qual pode estar entre 0 e 1 e é tratado como fator de capacidade da zona, sendo o percentual do produto de uma zona que segue para a zona seguinte após a ação de classificação. Dessa forma parte do material pode se manter na mesma zona devido a zona seguinte já estar em sua capacidade máxima, ou seja, cheia de partículas, não havendo espaço para a entrada de mais material até que parte desta massa se desloque para a zona inferior (Figura 20).



**Figura 20:** Modelo dinâmico da zona i com os fatores  $\alpha \in \beta$  (*Atta, 2010*).

As equações de 1 a 6 governam a operação na Zona i:

$$Z_i = \beta_i (1 - C_i) X_i \tag{1}$$

$$U_i = \alpha_i Z_{i-1} \tag{2}$$

$$X_i = U_i + F_i \tag{3}$$

$$F_i = (B_i S_i + (I - S_i)(X_i - U_{i+1})$$
(4)

$$\alpha_i = \min\left(\frac{M_i - 1_m F_i}{1_m Z_{i-1}}, 1\right) \tag{5}$$

$$\beta_i = \frac{g\eta^2 1}{2\omega^2 L_i} \tag{6}$$

O modelo visto até aqui representa o estado estacionário do comportamento do sistema. As equações (1 a 6) apresentadas devem ser resolvidas para se obter a taxa de passagem de minério entre as zonas e a distribuição granulométrica em cada uma delas.

A taxa de britagem ( $\omega$ /T), sendo  $\omega$  a velocidade do excêntrico e T o tempo, determina a taxa de realização das operações das equações 1 a 6. A cada ciclo parte do material será classificado para passar (1-C), mas nem todo este material passará para a zona inferior devido limitações de capacidade. O restante do material se junta ao material que não foi classificado e sofrerá ação da função seleção (S), a qual parte do material será quebrado (B), em seguida se junta a parte não selecionada (1-S) e permanece na zona (F), por fim, este se junta ao material vindo da zona superior (U). Dessa forma a granulometria do material localizado na zona i é X.

Assume-se que  $\omega$  (portanto T) é constante durante o momento do golpe, instante em que a partícula é quebrada. Dessa forma a distribuição granulométrica do material dentro da zona i depois do golpe é:

$$X_{i}(t+T) = U_{i}(t) + F_{i}(t),$$
(7)

onde X<sub>i</sub> é a distribuição granulométrica antes do golpe. Depois de um golpe a nova distribuição granulométrica será:

$$X_i(t+T) - X_i(t) = U_i(t) + F(t) - X_i(t).$$
(8)

Visando descobrir a taxa de mudança da granulometria, divide-se pelo tempo T,

$$\frac{X_i(t+T) - X_i(t)}{T} = \frac{U_i(t) + F(t) - X_i(t)}{T}$$
(9)

Como  $1/T = \omega$ , então:

$$\frac{X_i(t+T) - X_i(t)}{T} = \omega(U_i(t) + F(t) - X_i(t))$$
(10)

Transformando em equação diferencial, tem-se:

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = \omega(U_i(t) + F(t) - X_i(t)) \tag{11}$$

A partir da equação 11 chega-se ao modelo dinâmico mostrado na Figura 21.



Figura 21: Modelo dinâmico da zona i detalhado (Atta, 2010).

De posse do modelo do britador, o autor Atta (2010) desenvolveu um controlador de busca extrema (*Extremum Seeking Control* - ESC) para realizar o controle dinâmico da abertura de britador. Diferentemente de outros controladores, que buscam trazer a variável controlada para patamares determinados pelo operador, o ESC realiza a busca por um valor ótimo dinâmico. Sua

desvantagem está na necessidade de o processo ser contínuo. O britador a qual o controlador foi implantado se tratava de um hidrocônico, o qual permite regulagem da abertura mesmo durante o processo de britagem, sem causar prejuízos mecânicos ao equipamento.

Para construção do modelo é necessário o conhecimento das variáveis geométricas do britador, visto que influencia na eficiência e capacidade do equipamento. Os ângulos formados entre o bojo e o manto determinam a força aplicada ao material, fragmentando-os se for maior que a resistência das partículas, assim como o volume de minério a ser britado, o que influencia em sua capacidade. O minério passa entre estes revestimentos até a parte inferior, onde é descarregado. O movimento excêntrico do eixo provoca o ciclo de aproximação e distanciamento entre revestimentos.

Outro parâmetro pertinente ao britador é a função classificação, descrita abaixo (Atta, 2010) apud (Hulthen & Evertsson, 2008):

$$C(t, y, Dj) = \begin{cases} c_0(t, y, D_j), \\ 0, \\ 1, \end{cases}$$
(12)

$$C_0(t, y, Dj) = 1 - \left(\frac{D_{j-}d_2(t, y)}{d_1(t, y) - d_2(t, y)}\right)^n$$
(13)

$$d_1(t, y) = CSS_i(y, CSS) \tag{14}$$

$$d_2(t, y) = OSS_i(y, CSS) \tag{15}$$

Os valores de  $CSS_i$  e  $OSS_i$  representam a abertura na posição fechada e aberta, respectivamente, para cada zona.  $D_j$  é o diâmetro das partículas. Dessa forma a função classificação é determinada pela abertura do britador, e representa a probabilidade de a partícula ser aprisionada pelo manto em seu movimento rotacional. De posse das regressões realizadas para o bojo e manto, onde uma função representará a geometria destas superfícies, e da APF do britador é possível calcular a função classificação.

A função seleção adotada por Atta (2010) é baseada em (Evertsson, 1998), o qual introduziu a razão "s/b" na equação desenvolvida por Gauldie (1953), sendo "b" a distância entre bojo e o manto (altura da camada) quando este está na posição aberta. O parâmetro "s" (*stroke*) se trata da distância entre o manto na posição aberta e o próprio manto na posição fechada. A razão entre estas variáveis determina como a partícula será quebrada, visto que se uma partícula for maior que a dimensão "b", obrigatoriamente será quebrada, ou seja, a função seleção será 1 e mecanismo de

quebra será partícula-revestimento. Para partículas menores que "b" o mecanismo de quebra será partícula-partícula (Evertsson, 1998).

$$s(D_j, t, y) = s_0(\sigma(t, y))D_j^a$$
(16)

Sendo  $\sigma(t, y)$  a relação de compressão (s/b), a qual é função da abertura do britador e da altura.

Além das variáveis relativas ao equipamento é necessário levantamento das variáveis pertinentes ao minério. Sendo os parâmetros  $n_1$ ,  $n_2$  e K da equação 17 característicos de cada material.

$$B(D_{1}, D_{2}) = K\left(\frac{D_{1}}{D_{2}}\right)^{n_{1}} + (1 - K)\left(\frac{D_{1}}{D_{2}}\right)^{n_{2}}$$
(17)

Onde  $B(D_1,D_2)$  é o percentual de partículas menores que D<sub>1</sub>, que foram geradas a partir da quebra de uma partícula de tamanho D<sub>2</sub>. A primeira parte da equação descreve a distribuição granulométrica das frações finas na população de partículas provenientes do evento de quebra, sendo K a fração destas partículas.

Como o modelo de Atta (2010) utiliza-se a velocidade do excêntrico como variável controlada, o fator  $\eta$  da equação 6 também é variável. Como neste trabalho a variável manipulada é a APF, fixou-se a velocidade para um valor constante e, consequentemente,  $\eta$  também constante.

Utilizando-se as equações da função quebra, seleção, classificação, restrição de capacidade, restrição de largura das zonas, Atta (2010) construiu uma rotina em Matlab a partir do diagrama mostrado na Figura 21. Dessa forma, a resposta do modelo para dado minério alimentado é a granulometria da saída do britador, assim como a vazão de minério.

#### 4. CONTROLADOR PREDITIVO POR MODELO

### 4.1. Introdução

Neste Capítulo, tem-se como objetivo realizar o desenvolvimento de controlador MPC tendo como variável manipulada a abertura da câmara de britagem e como variável controlada a razão, a qual se trata da proporção da produção de minério granulado em relação à alimentação da planta. Implementou-se ainda um controlador PI (Proporcional-Integral) para comparação da performance do controlador.

Controladores MPC são utilizados principalmente em processos multivariável em que não raramente há forte interação entre as variáveis do processo. Neste trabalho o controlador está sendo aplicado à um processo *SISO* (*Single Input Single Output*), dada a simplicidade da planta a qual o mesmo está sendo aplicado. Porém vê-se este projeto como primeiro passo para desenvolvimento de trabalhos futuros, descritos no tópico 7, os quais serão aplicados em planta mais complexa, com restrições e não linearidades que fatalmente necessitará de uma abordagem multivariável.

#### 4.2. Controle Preditivo por Modelo (MPC)

Controladores MPC utilizam, além do sinal do erro na saída, o modelo do processo para calcular as ações de controle. Dessa forma é capaz de prever as respostas futuras do processo, atuando de forma a minimizar a diferença entre as respostas preditas e a resposta desejada (Cassilo, 2009). Tais saídas são calculadas de forma a minimizar a resposta predita e o *setpoint* do processo.

Como pode ser visto na Figura 22, a estratégia de controle MPC pode ser descrita da seguinte forma (Euzébio, 2010):

- a) Determina-se um horizonte de predição (Hp), onde os valores futuros das saídas do sistema serão previstos com base nos valores de saídas e entradas passadas e ações de controle futuras. Para isto utiliza-se o modelo do processo.
- b) Visando-se manter a saída do processo o mais próximo possível da trajetória de referência, um conjunto de sinais de controle futuros é calculado de forma a otimizar um determinado critério, que usualmente se trata de uma função quadrática entre o sinal de saída predito e a trajetória de referência.

c) Apesar do sinal de controle ser calculado até o horizonte de predição, somente o primeiro sinal de controle é aplicado à planta. Isto se dá pelo fato de no instante seguinte o valor real da variável de saída já ser conhecido, repetindo o primeiro passo.



Figura 22: Estratégia MPC (Euzébio, 2010).

Esta técnica de controle tem tido um significativo impacto na indústria, visto que é aplicável a diversos cenários práticos, como aplicações em sistemas *SISO* e *MIMO* (*Multiple Input Multiple Output*), permite ações de realimentação e pré-alimentação, pode-se incluir restrições na entrada e saída, e ainda, podem compensar os tempos mortos do processo (Bravo & Normey-Rico, 2009).

Os tópicos 4.2.1 segue conforme Euzébio (2010) visto que esta sequência facilita a interpretação dos conceitos.

#### 4.2.1. Controle por Matriz Dinâmica sem restrições – DMC

#### 4.2.1.1. Modelo de Convolução

A Figura 23 mostra os coeficientes do Modelo de Convolução, os quais são calculados de forma experimental, por meio da alteração da variável manipulada na forma de degrau unitário e coleta da resposta da saída a esta perturbação, em intervalores de amostragem múltiplo de Ta.



Figura 23: Coeficientes do Modelo de Convolução.

Na equação 18 é apresenta a forma matemática, a qual correlaciona o sinal de saída (y) à variação do sinal de entrada ( $\Delta$ u) que ocorre em t=0. O valor de N corresponde ao número de dados coletados conforme o intervalo de amostragem até se atingir o novo estado estacionário, dessa forma o tempo de acomodação será multiplicação de N e Ta.

$$y(1) = y(0) + g_1 \Delta u$$
  

$$y(2) = y(0) + g_2 \Delta u$$
  

$$\vdots$$
  

$$y(N) = y(0) + g_N \Delta u$$
(18)

Partindo-se do princípio que no instante t=0, quando o degrau unitário é aplicado, o sistema se encontrava em estado estacionário, então o valor de y(0) é igual a zero. Sendo assim, para se encontrar o valor dos coeficientes  $g_N$  basta realizar a divisão entre as saídas e a variação da variável

manipulada. Aplicando-se nova perturbação ao sistema, chega-se a equação 19 pelo princípio da superposição.

$$y(1) = y(0) + g_1 \Delta u(0)$$
  

$$y(2) = y(0) + g_2 \Delta u(0) + g_1 \Delta u(1)$$
  

$$\vdots$$
  

$$y(N) = y(0) + g_N \Delta u(0) + g_{N-1} \Delta u(1)$$
  
(19)

Segue-se na equação 20 o caso generalizado da equação 19, sendo N o número de perturbações consecutivas da variável u.

$$y(t) = y(0) + \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u(t-i)$$
 (20)

### 4.2.1.2. Predição

A partir da equação 20 e considerando-se y(0)=0, chega-se a equação 21. O valor de y(t) é a resposta do sistema no tempo igual a t,  $g_i$  foram obtidos a partir da resposta ao degrau e  $\Delta u(t - i)$  é a variação da ação entrada entre o tempo (t - i) e o tempo imediatamente anterior (t - i - 1)

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u(t-i)$$
(21)

Acrescentando-se um distúrbio e levando-se a equação para o tempo igual a (t + k), a equação 21 é modificada e passa a ser apresentada na forma da equação 22.

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{N} g_1 \Delta u(t+k-i) + \hat{n} (t+k|t)$$
(22)

Separando-se os termos que representam as variações passadas da entrada daqueles se apresentam os valores previstos (futuros), chega-se à equação 23.

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{N} g_1 \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{N} g_1 \Delta u(t+k-i) + \hat{n}(t+k|t)$$
(23)

Considerando-se que os distúrbios são constantes então o valor do distúrbio no tempo (t + k) é igual no tempo t, sendo igual também a diferença entre a última saída medida e a saída prevista para o mesmo instante de tempo.

$$\hat{n}(t+k|t) = \hat{n}(t|t) = y_m(t) - \hat{y}(t|t)$$
(24)

Realizando-se a substituição da equação 24 em 23, resulta:

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{N} g_1 \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{N} g_1 \Delta u(t+k-i) + y_m(t)$$

$$-\sum_{i=k+1}^{\infty} g_1 \Delta u(t-i)$$

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{N} g_1 \Delta u(t+k-i) + f(t+k)$$
(25)
(25)
(25)

A equação 27 é chamada de resposta livre do sistema, visto que não depende de ações de controle futuras.

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{N} (g_{k+1} - g_i) \Delta u(t-i)$$
(27)

A partir da Figura 28 pode-se concluir que após N períodos amostrais os valores de  $g_i$  tentem à um valor constante, conforme equação 28.

$$g_{k+i} - g_i \cong 0 \tag{28}$$

As saídas preditas serão calculadas ao longo do horizonte de predição considerando-se H<sub>u</sub> ações de controle. Dessa forma, a partir da equação 22, tem-se:

$$\hat{y}(t+1|t) = g_1 \Delta u(t) + f(t+1)$$

$$\hat{y}(t+2|t) = g_2 \Delta u(t) + g_1 \Delta u(t+1) + f(t+2)$$

$$\hat{y}(t+3|t) = g_3 \Delta u(t) + g_2 \Delta u(t+1) + g_1 \Delta u(t+1) + f(t+3)$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}(t+Hp|t) = \sum_{i=1}^{H_u} g_1 \Delta u(t+H_p-i) + f(t+H_p)$$
(29)

Apresentando-se na forma de vetores chega-se a equação 30:

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \tag{30}$$

onde,

$$\widehat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \widehat{y}(t+1|t) \\ \widehat{y}(t+2|t) \\ \vdots \\ \widehat{y}(t+H_p|t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+H_p-i) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(t+1) \\ f(t+2) \\ \vdots \\ f(t+H_p) \end{bmatrix}$$
(31)

A Matriz Dinâmica G contêm todos os coeficientes do modelo de resposta ao degrau e possui dimensão de  $H_p$  x Hu.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{H_u} & g_{H_u-1} & \cdots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{H_p} & g_{H_p-1} & \cdots & g_{H_p-H_u-1} \end{bmatrix}$$
(32)

### 4.2.1.3. Algoritmo de Controle

Na equação 33 apresenta-se o quadrado da diferença entre a saída prevista e a trajetória de referência, calculado ao longo do horizonte de predição. Dessa forma, o controlador seleciona valores para a ação de controle de forma a minimizar os erros futuros.

$$J = \sum_{j=1}^{H_p} [\hat{y}(t+j|t) - \omega(t+j)]^2$$
(33)

Para sintonia do controlador utiliza-se ainda o parâmetro  $\lambda$ , chamado de coeficiente de supressão de movimento, conforme equação 34. Aumentar o valor de  $\lambda$  significa dar mais importância à ação de controle, que deverá acontecer de forma mais suave, do que ao atingimento do *set point* pela variável controlada.

$$J = \sum_{j=1}^{H_p} [\hat{y}(t+j|t) - \omega(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{H_p} \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2$$
(34)

Substituindo-se a equação 34 em 30, tem-se a forma vetorial do algoritmo de controle:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{\omega})^{\mathrm{T}} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{\omega}) + \lambda \mathbf{u}^{\mathrm{t}} \mathbf{u}$$
(35)

Desconsiderando-se restrições no sistema, tem-se a seguinte solução analítica:

$$\frac{dJ}{d\boldsymbol{u}} = (2\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\omega}) + 2\lambda\boldsymbol{u} = 0$$
(36)

a partir da qual chega-se a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T (\omega - \mathbf{f})$$
(37)

Apesar de toda a sequência de ações de controle ao longo do horizonte de predição serem calculadas, somente a primeira ação de controle é aplicada ao processo. Para a ação seguinte a saída real do instante anterior já é conhecida. Dessa forma, é utilizada para determinação da próxima ação de controle.

$$u(t) = u(t-1) + \Delta u(t) \tag{38}$$

#### 4.2.1.4. Sintonia de Controladores DMC

Deve-se atuar nas variáveis horizonte de controle (H<sub>u</sub>), horizonte de predição (H<sub>p</sub>) de coeficiente de supressão ( $\lambda$ ) de movimento para a adequada sintonia de controladores DMC. Certos processos necessitam de mais atenção às ações de controle, onde os incrementos devem ser reduzidos, dada particularidades dos atuadores, por exemplo. Neste caso o valor deve-se adotar um valor de  $\lambda$  mais alto, tendo como resultado uma resposta mais lenta.

Como  $H_u \leq H_p$ , aumentar o valor do horizonte de controle implica necessariamente e aumento do horizonte de predição. Neste caso o desempenho do controlador seria aumentado em detrimento da robustez, dado que o valores dos incrementes na ação de controle também aumentaria.

#### 5. RESULTADOS SIMULADOS

# 5.1. Avaliação do Modelo de Simulador de Britador Cônico de (Atta, 2010)

Para avaliar o modelo foi utilizado o caso mais simples de planta de britagem, onde o material britado é peneirado, gerando dois fluxos de produto, conforme Figura 24, visto que o objetivo é avaliar somente o comportamento da granulometria do material britado e a taxa de alimentação do britador para cenários de variações de APF e características do minério (granulometria e resistência mecânica). Portanto, foge ao escopo da avaliação a utilização de modelos de peneiramento, o qual calcularia de forma mais assertiva a divisão do material britado entre *oversize* e *undersize*. Para tanto, realizou-se a tal divisão conforme malha do peneiramento, com eficiência de 100% para todas as malhas, ou seja, todo o material maior que a malha segue para o *oversize* e menor que a malha segue para o *undersize*.



Figura 24: Planta de britagem adotada para a avaliação do modelo.

Inicialmente foi alimentado no simulador um *ROM* composto por duas litologias, chamadas aqui por material A e B, sendo a primeira composto por material mais resistente e grosso nas frações maiores que a malha da peneira (16mm), conforme Figura 25, e o segundo se trata de minério mais fino e friável. A avaliação se deu a partir da variação da APF do britador e análise das seguintes variáveis: (i) eficiência de britagem na malha do peneiramento, (ii) razão (proporção de produto granulado em relação à alimentação da planta) de ambos materiais, (iii) produtividade de cada material, (iv) granulometria do minério britado para cada material, (v) construção de gráfico com razão x APF x tipo do material, (vi) construção de gráfico com taxa de alimentação do

britador x APF x tipo do material. O simulador deve gerar as respostas à variação da APF de forma coerente com a granulometria e resistência mecânica do britador e ainda, tais respostas devem surgir de forma transiente entre as mudanças do ponto de operação, fato que em plantas reais acontece.



Figura 25: Granulometria da alimentação do britador, material A e B.

Como mostrado na Figura 26, a eficiência de britagem reduz quando se aumenta a APF. É possível calcular a eficiência de britagem em cada malha utilizada para análise granulométrica, sendo as mais relevantes a eficiência na malha igual a abertura da tela da peneira que é alimentada pelo britador. Como o material A é mais resistente, é natural que sua a eficiência de britagem seja menor que a do material B. Dessa forma, o resultado do simulador se apresenta coerente com a prática.



Figura 26: Eficiência de britagem com variação da APF.

Na Figura 27 mostra-se que quanto maior a abertura do britador maior será razão, visto que a eficiência de britagem será menor, o que gera um material mais grosso na saída do britador. Conforme esperado, a curva para o material A está acima do material B, indicando que a produção de material granulado será maior para o material A, visto que apresenta maior percentual de partículas grossas.



Figura 27: Razão para cenários de variação da APF.

Na Figura 28 os valores percentuais de produção de material mais grosso em termos de produtividade.



Figura 28: Produtividade para cenários de variação da APF.

Quanto menor a APF do britador mais fino deverá ser o material britado, dada a redução da área de passagem do minério e consequente aumento da eficiência de britagem, como evidenciado na Figura 29. Após variar a APF de 25mm para 50mm percebe-se, por meio da Figura 27, que o material foi sofrendo um engrossamento, porém de forma bastante sutil, o que em cenários reais ocorreria de forma mais abrupta, como alcançado pela análise exploratória com minério de Serra Leste (Figura 2). Dessa forma, o simulador deve ser calibrado a partir de dados reais da planta a ser simulada de forma a corrigir a granulometria e capacidade do britador.



Figura 29: Curvas granulométricas para a alimentação de material britado (Material A).

A granulometria da alimentação de material no britador para o material B é mostrada na Figura 30. Percebe-se que, por ser mais friável, possui granulometria mais fina que o material A.



Figura 30: Curvas granulométricas para a alimentação de material britado (Material B).

Construiu-se a Figura 31 para verificar o comportamento da variável razão para vários cenários de APF e tipo de material. Na curva mostra-se que a maior razão, ou seja, maior produção de granulado, será atingida trabalhando com APF de 50mm ao mesmo tempo que se processa somente o material A, quando o percentual de material B é 0%, visto que são complementares.



Figura 31: Razão x APF x Tipo de material.

Em contrapartida, processando-se 100% de material B a 50mm de APF, a máxima produtividade seria atingida. Porém a diferença é muito pequena, visto que o britador em questão possui capacidade para processamento de ambos os tipos de minério (Figura 32).



Figura 32: Taxa de alimentação x APF x Tipo de material.

Dado o exposto, o modelo simula fielmente o comportamento de uma planta de britagem, desde que calibrada com dados experimentais.

## 5.2. Desenvolvimento dos Controladores

Para desenvolvimento de ambos os controladores foi necessária a identificação da função de transferência do sistema. Para isto foi aplicado um sinal degrau na entrada e amostrado o sinal de saída até a estabilização da resposta. O ponto de operação, ou seja, o valor inicial da APF, foi de 40mm. O resultado é exibido na Figura 33.



Figura 33: Resposta ao degrau.

O controlador MPC utiliza esta função de transferência para prever as saídas futuras quando se altera o ponto de operação e/ou quando perturbações são adicionadas ao sistema. Foi realizada simplificação desta função para uma de primeira ordem para sintonia do controlador PI.

#### 5.2.1. Controle Preditivo por Modelo (MPC)

Para desenvolvimento do controlador MPC utilizou-se a Figura 22 que, ao contrário do controlador PI, não é necessária a simplificação para modelo de primeira ordem.

Para o caso estudado, restringiu-se a ação de controle para valores entre 25mm e 55mm para a APF. O horizonte de controle e predição e o coeficiente de supressão do movimento foram determinados de forma a se obter o desempenho e robustez adequados ao processo. Buscou-se uma sintonia tal que a resposta atinja o *set point* de forma rápida, porém respeitando a dinâmica do atuador que fará a regulagem da APF. Os parâmetros adotados foram:  $H_p=15$ ,  $H_u=7$ ,  $\lambda = 10$ . Estes valores foram obtidos de forma a gerar a menor integral do erro absoluto.

### 5.2.2. Proporcional-Integral (PI)

Utilizando-se o método a curva de reação, chegou-se a uma função de transferência de primeira ordem. A Figura 33 foi utilizada para determinar os parâmetros K,  $\tau \in \theta$ , que são o ganho, a constante de tempo e o atraso, respectivamente.



Figura 34: Determinação dos parâmetros de forma gráfica.

O Figura 34 mostra que não há atraso e a função de transferência de primeira ordem é descrita na equação 39:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{5,86}{12,1s + 1}$$
(39)

A função de transferência de primeira ordem obtida acompanha a função de transferência da planta com pequenas variações, conforme Figura 35.

Resposta ao Degrau



Figura 35: Resposta ao degrau para sistema de alta ordem e primeira ordem.

Neste trabalho, a formulação adotada para o controlador PI é apresentada na equação 40.

$$C(s) = Kp\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \tag{40}$$

Para determinação dos parâmetros do PI foi utilizado o Método do Modelo Interno (IMC) o qual utiliza o modelo do processo e a especificação de desempenho para calcular os parâmetros Kp (Proporcional) e Ti (Integral) de controladores PI.

Controlador	Кр	Ti
PI	$\frac{2\tau+\theta}{2K\lambda}$	$ au + \frac{\theta}{2}$

Tabela 1: Método IMC para determinação dos parâmetros PID.

O parâmetro  $\lambda$  define o tempo para a saída do processo atingir o *set point*. Dessa forma, tem-se: Kp = 0,343, Ti = 12,1,  $\lambda = 0.5 \tau$ . Como Ki=Kp/Ti, então Ki=0,028.

A Figura 36 mostra a resposta ao degrau ascendente e descendente para a razão. Verificase que a performance do controlador MPC é mais rápida. No que tange à ação de controle, verificase que quando o *set point* da razão reduziu, foi necessário o fechamento do britador e o inverso ocorreu quando a *set point* da razão aumentou. Verifica-se ainda a queda da produção de granulado quando os controladores realizaram o fechamento do britador.



Figura 36: Resposta ao degrau para a razão utilizando controlador MPC e PI.

As Figuras 37 e 38 mostram a resposta dos controladores à presença de distúrbios. No caso da Figura 37 houve mudança do tipo de minério alimentado na planta, passando de 100% de material A para 100% de material B. Nos instantes seguintes, percebe-se uma redução da razão,

visto que o material B apresenta minério de granulometria mais fina que o material A, assim como menor resistência mecânica. Os controlares realizam a abertura do britador de forma a tingir o *set point* de razão. Novamente o controlador MPC se mostra mais rápido.



Figura 37: Resposta à alteração da granulometria da alimentação do britador.

Outra perturbação inserida foi o desgaste do revestimento, de forma a verificar se os controladores são capazes de corrigir a APF e manter a razão segundo o *set point*. Conforme Figura 38, percebe-se que os controladores atuam constantemente na abertura do britador, realizando o fechamento do britador na mesma proporção que o desgaste aumentaria esta abertura.



Figura 38: Resposta ao desgaste dos revestimentos do britador.

Na Tabela 2 apresenta-se a integral do erro absoluto ao realizar alteração do *set point* para a razão (Figura 36) e à mudança do material alimentado na planta, passando de material B para material A (Figura 37). Em ambos os casos, o erro do controlador MPC é inferior ao do PI.

Distúrbio\Controlador	MPC	PI	Diferença entre MPC e PI
Mudança de ponto de operação	0,0797	0,1529	-47,87%
Distúrbio mudança de material	0,2747	0,5191	-47,08%

Tabela	2:	Integral	do	erro	absoluto
--------	----	----------	----	------	----------

# 6. CONCLUSÃO

A indústria da mineração, principalmente as de produção a seco de minério de ferro, pouco se utiliza de processos automatizados para regulagem das variáveis desejadas. Uma aplicação em planta de britagem foi abordada no trabalho e mostrou que há ganhos em se utilizar controladores no processo, compensando inclusive desgaste de revestimento de britador. Outro pilar do projeto trata da validação de simulador de britador, assim como sua aplicabilidade para desenvolvimento de controladores. Este trabalho foi desenvolvido de forma a responder as questões que seguem:

- a) O modelo simulado de britador cônico utilizado reproduz variações na granulometria e na produtividade conforme resultado da análise exploratória realizada na planta de Serra Leste?
  - Sim. O simulador utilizado neste trabalho reproduz variações na granulometria e na capacidade do britador em conformidade com dados obtidos em análise exploratória em Serra Leste. Como o simulador utilizado considera um britador genérico, as curvas granulométricas do material britado não são compatíveis com a do teste exploratório. Porém, o que se está avaliando neste trabalho é somente o comportamento geral, onde constatou-se que quanto menor a APF mais fino será o material britado. Para representação de uma planta real específica o simulador deve sofrer um processo de calibração com dados geométricos do britador e amostragens do minério em campo. De forma análoga, o modelo simulado reproduziu redução de capacidade quando se reduziu a abertura da câmara de britagem.
- b) Ajuste dinâmico da APF é capaz de aumentar ou reduzir a produção de minério grosso conforme necessidade?
  - Sim. O controlador MPC desenvolvido foi capaz de variar a produção de minério grosso conforme valores pré-determinados como sendo o *set point* do sistema, atendendo aos requisitos de performance, assim como o controlador PI.
- c) Os controladores MPC e PI são capazes de realizar o fechamento do britador na proporção do desgaste dos revestimentos?

- Sim. Um problema constante de plantas de britagem é falta de regulagem da APF dos britadores para corrigir o desgaste dos revestimentos. Tal regulagem necessita de parada do britador e segue um procedimento de segurança que demanda cerca de 30 a 40 minutos. A utilização de controlador resolveria esta falha no processo produtivo. Como visto no Capítulo anterior, o controlador foi capaz de compensar o desgaste.
- d) Há vantagens quando se utiliza controlador MPC ao invés de controladores PI para esta aplicação?
  - Sim. Como se trata de um processo SISO era esperado que o controlador PI também respondesse de forma adequada tanto às variações de *set point* quanto às demais perturbações. Neste caso o controlador MPC gera um menor tempo de acomodação, assim como atinge o *set point* pela primeira vez de forma mais rápida.
- e) O modelo se mostra viável para desenvolvimento de sistemas de controle?
  - Sim. O modelo é viável para desenvolvimento de sistemas de controle, dada sua capacidade de simular uma planta de britagem de forma dinâmica, onde os parâmetros podem ser alterados por um sistema de controle e a resposta pode ser retornada ao controlador, o qual calculará o erro e ajustará a variável manipulada em caso de necessidade.

#### 7. TRABALHOS FUTUROS

Comprovada a capacidade do simulador de Atta (2010) em reproduzir o comportamento de plantas de britagem, serão desenvolvidos controladores para dois cenários distintos para a planta de Serra Leste:

- a) Controlador para maximizar a produção Adotará estratégias de controle multivariável, controlando a produtividade da planta, nível dos silos dos peneiramento e britagem e vazão de minério na carga circulante a partir de ações de controle sobre a APF do britador secundário. O objetivo é determinar a APF que gerará a menor carga circulante possível, independentemente de possíveis mudanças de granulometria ou competência mecânica do ROM, e consequentemente a maior produtividade da usina. Neste projeto está prevista a instalação de um analisador de granulometria para a alimentação do britador.
- b) Controlador para maximização de minério granulado no peneiramento primário dado o início de estudos para modificação da rota de processo da planta, os quais avaliam a possibilidade de produção de minério fino no peneiramento primário, a instalação de um sistema de controle para a APF do britado possibilitaria a regulagem da abertura da câmara de britagem de forma a aumentar ou reduzir a produção de minério granulado, geralmente com maior valor agregado.

# **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Asbjornsson, G. (2013). Modelling and simulation of dynamic behavior in crushing plants. . *Department of Product and Prodution Development.* Goteberg.
- Asbjornsson, G., & Hulthen, E. (2012). Modelling and dynamic simulation of gradual performance deterioration of a crushing circuit – Including time dependence and wear. *Department of Product and Production Development*. Goteberg, Sweden: Chalmers University of Technology.
- Atta, K. (2010). *Modelling and On-Line Optimization of Cone Crushers*. Lulea, Sweden: Department of Computer Science, Electrical and Space Engineering.
- Berman, R., Munro, S., & Evertsson, C. (8-9 de August de 2011). Chusher An Essential Part of Energy Efficient Comminution Circuits. *Metallurgical Plant Design and Operating Strategies*, (pp. 67-68). Perth, Autralia.
- Bravo, C., & Normey-Rico. (2009). Controle de plantas não lineares utilizando controle preditivo baseado em modelos locais. *Revista Controle e Automação, Vol. 20.* Florianopolis, Brasil.
- Cassilo, D. (2009). Controle Preditivo Não Linear Baseado no Modelo de Hammerstein com Prova de Estabilidade. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- Clearly, P., & Sinnott, M. (2014). Simulation of particle flows and breakage in crushers using DEM: Part 1– Compression crushers. *CSIRO Computing Informatics.* Australia.
- Euzébio, T. (2010). Estudo e Implementação de um Algoritmo de Avaliação de Desempenho de Malhas de Controle sob uma Referência DMC. Campina Grande, Brasil: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande.

Evertsson, C. (1998). Output prediction of cone crushers. *Minerals Enginnering*.

Gauldie, K. (1953). Performance of Jaw Crushers. Engineering.

- Gomes, W. (2014). Integração de modelos energéticos e de balanço populacional para simulação de moagem em moinhos de bolas. *Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Hulthen, E., & Evertsson, C. M. (2008). On-line optimization of crushing stage using speed regulation. *Proc. of XXIV International Mineral Processing Congress,*.
   Beijing, China.

- Johansson, M., Quist, J., Everston, M., & Hulthén, E. (2016). Cone crusher performance evaluation using DEM simulations and laboratory experiments for model validation. *Minerals Enginnering*.
- King, R. (2001). *Modelling and Simulation of Mineral Processing Systems*. Utah, USA: BH.
- Li, H., & McDowell, G. (2014). Discrete element modelling of a rock cone crusher. *University of Nottingham, United Kingdom.*
- Lichter, J., Lim, K., Potapov, A., & Kaja, D. (2009). New developments in cone crusher performance optimization. *Minerals Enginnering*.
- Metso. (1994). Uma Publicação Técnica da Allis Mineral Systems -Fábrica de Aço Paulista. São Paulo, Brasil.
- Metso. (2011). Manual de Instruções. *Britadores cônicos HP100, 200, 300, 400 e 500, Rev. 04.* Sorocaba, São Paulo.: Metso Minerals.
- Metso. (2015). Basics in Mineral Processing. Finland.
- Mormul, A. L., Velasquez, A., Pérez, J., J.M.M., A., Gonzalez, O., & Ramirez, E. (2015). Modelo de Whiten (1972) modificado para modelación de la trituración de la antracita residual de Nicaro. *Minería y Geología*, p. 13-28.
- Quist, J. (2012). Cone Crusher Modelling and Simulation: Development of a virtual rock crushing environment based on the discrete element method with industrial scale experiments for validation. *Department of Product and Production Development.* Goteberg, Sweden.
- Silva, K., Souza, E., Figuereido, J., & Mendes, P. (18 a 21 de Setembro de 2007). Determinação e utilização das funções quebra e seleção em moagem de minério de ferro. XXXVII Seminário de Redução de Minério de Ferroe Matérias.
- Whiten, W. (1972). The simulation of crushing plants with models developed using multiple spline regretion. (pp. 257-264). Journal of the African Institute of Mining and Metallurgical.